



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE EDILE AMBIENTALE

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA CIVILE

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

METODI NUMERICI PER L'ANALISI QUASI-STATICA NON LINEARE DI
STRUTTURE INTELAIATE SALDATE IN ACCIAIO

Relatore: Prof. Stefano Secchi

Laureando: Omar De Palo Matr. n. 1019854

Anno Accademico 2012/2013

INDICE

Prefazione	7
1. Inquadramento del problema	9
2. Problemi non lineari	15
2.1 Metodi indiretti di soluzione	16
2.1.1 Il metodo di Newton-Raphson	17
Metodo di Newton-Raphson modificato	19
Metodo quasi-Newton BFGS	19
2.2 Non-linearità di materiale	22
2.2.1 Incrudimento cinematico	24
2.2.2 Meccanica del Danno	27
Definizione della variabile di danno	28
Definizione di tensione effettiva	30
Principio dell'equivalenza delle deformazioni	30
Criterio di inizio del danneggiamento	31
Valore critico della variabile di danno a rottura	31
Legge di evoluzione del danno per materiali plastici	32
Legge di evoluzione del danno – criterio deformativo	32
Legge di evoluzione del danno – criterio energetico	33

Indice

3.	Analisi energetica.....	35
3.1	Lavoro delle forze esterne	37
3.2	Energia interna.....	37
4.	Campagna sperimentale di riferimento	41
4.1	Campioni testati.....	41
4.2	L'apparato di prova	42
4.3	Storie di carico.....	44
4.4	Proprietà dei materiali	48
4.5	Risultati delle prove sperimentali	49
4.5.1	BCC6-A.....	50
4.5.2	BCC6-B e BCC6-BB	51
4.5.3	BCC6-C	52
4.5.4	BCC6-D.....	53
4.5.5	BCC6-E.....	54
5.	Modellazione agli elementi finiti	57
5.1	Modellazione geometrica	57
5.1.1	Mesh.....	59
5.1.2	Elementi utilizzati	60
	Descrizione geometrica	62
	Interpolazione parametrica.....	64
	Deformazione e curvatura membranale	65
	Aggiornamento dell'orientazione	66
	Cambio di curvatura	67
	Incremento di deformazione di membrana.....	69
	Incremento di curvatura	70

Indice

Lavoro virtuale	70
Rateo del lavoro virtuale	71
Gestione del taglio trasversale.....	72
Formulazione dell'elemento shell completamente integrato a deformazioni finite S4	76
5.2 Metodo di analisi scelto	78
5.3 Modellazione del materiale.....	79
5.3.1 Elastoplasticità.....	79
5.3.2 Modello di danno.....	80
5.4 Condizioni al contorno	83
6. Risultati delle simulazioni	85
6.1 BCC6-A	86
6.1.1 $G_f=5000, d_{MAX}=0.7$	86
6.1.2 $G_f=4000, d_{MAX}=0.7$	87
6.2 BCC6-B	90
6.2.1 $G_f=5000, d_{MAX}=0.7$	90
6.2.2 $G_f=4000, d_{MAX}=0.7$	91
6.3 BCC6-BB.....	92
6.3.1 $G_f=5000, d_{MAX}=0.7$	93
6.3.2 $G_f=4000, d_{MAX}=0.7$	94
6.4 BCC6-C	94
6.4.1 $G_f=5000, d_{MAX}=0.7$	94
6.4.2 $G_f=4000, d_{MAX}=0.7$	96
6.5 BCC6-D	98
6.5.1 $G_f=5000, d_{MAX}=0.7$	98

Indice

6.5.2	$G_f=4000, d_{MAX}=0.7$	100
6.6	BCC6-E	102
6.6.1	$G_f=5000, d_{MAX}=0.7$	102
6.6.2	$G_f=4000, d_{MAX}=0.7$	104
6.7	Considerazioni	106
7.	Influenza dei difetti iniziali	109
7.1	Influenza del processo di saldatura.....	109
7.1.1	BCC6-C con presollecitazione da saldatura.....	111
7.1.2	BCC6-E con presollecitazione da saldatura	112
7.2	Influenza delle imprecisioni geometriche.....	112
7.2.1	BCC6-C con imperfezione geometrica iniziale	114
7.2.2	BCC6-E con imperfezione geometrica iniziale.....	115
7.3	Confronto con le analisi precedenti	115
7.3.1	BCC6-C confronto tra analisi.....	116
7.3.2	BCC6-E confronto tra analisi	117
8.	Connessioni saldate trave-colonna alternative	119
8.1	Localizzazione delle cerniere plastiche	120
8.2	Dettagli strutturali per la localizzazione delle cerniere plastiche	121
8.2.1	<i>Welded unreinforced flange – welded web</i>	122
8.2.2	<i>Reduced beam section method</i>	123
8.2.3	<i>Slotted web e reduced web</i>	125
8.3	Proposta di un nodo alternativo	126
8.3.1	Progettazione della riduzione di sezione della trave	127
8.3.2	Descrizione del modello e delle analisi.....	128
8.3.3	Risultati ottenuti	129

Indice

8.3.4	Considerazioni.....	132
9.	Conclusioni.....	133
	Bibliografia.....	135
	Indice di figure, grafici, tabelle	137

PREFAZIONE

Dalla seconda metà del '900 lo studio del comportamento delle strutture sottoposte ad azioni di natura sismica ha svolto un ruolo sempre più importante nell'ambito dell'ingegneria civile. Nel tempo hanno acquisito importanza non solo la definizione dell'azione sismica cui una struttura deve far fronte ma anche i sistemi strutturali, i dettagli costruttivi e i materiali impiegati a tal scopo.

Al fine di conoscere meglio il comportamento di questi ultimi risultano importanti sia indagini sperimentali che metodi di analisi numerica basati sul metodo agli elementi finiti quali quello sviluppato e in seguito presentato. Al capitolo 1 verranno quindi descritte le motivazioni e l'inquadramento del lavoro svolto.

Con l'intento quindi di simulare numericamente un fenomeno reale con la possibilità poi di utilizzare il modello per estendere i risultati a casi non verificati sperimentalmente, verranno da prima presentate le nozioni teoriche di base utilizzate nell'ambito della tesi.

Si inizierà al capitolo 2 trattando sinteticamente le generalità dei problemi non lineari, le fonti di non-linearità in un problema suddividendole in non linearità di materiale, di geometria e di contorno, i metodi numerici di soluzione di problemi non lineari. Successivamente, all'interno dello stesso capitolo, si andranno a trattare più in dettaglio le fonti di non-linearità inerenti il lavoro sviluppato. Si parlerà quindi prima delle non linearità dovute al materiale e quindi in particolare del fenomeno di inelasticità, incrudimento e di danno.

Prefazione

Si passerà a questo punto ad una rapida trattazione dell'aspetto energetico nei problemi agli elementi finiti al capitolo 3 per l'importanza che questo ricopre nella comprensione delle analisi numeriche di questa complessità.

Svolta la trattazione introduttiva si passerà al capitolo 4 a descrivere la campagna sperimentale utilizzata come riferimento per le analisi svolte descrivendo i provini, le modalità di prova e gli apparati utilizzati per lo svolgimento. Al termine di ciò verranno presentati i risultati sperimentali ottenuti.

A questo punto si passerà a trattare al capitolo 5 la modellazione agli elementi finiti utilizzata per le simulazioni svolte. Si motiveranno quindi nel corso del capitolo le scelte svolte per quanto riguarda la modellazione geometrica del modello, il metodo di soluzione utilizzato, la modellazione del materiale.

Al capitolo 6 si presenteranno i risultati ottenuti dalle analisi. Nel successivo capitolo 7 si indagherà l'influenza di difetti iniziali geometrici e dovuti alla presenza di tensioni residue da saldatura.

In ultimo verrà studiata una proposta alternativa di connessione trave pilastro al capitolo 8. **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** per poi al capitolo 9 trarre le conclusioni di quanto esposto.

1. INQUADRAMENTO DEL PROBLEMA

I terremoti sono da sempre un problema con il quale il progettista di un edificio deve confrontarsi. A causa dell'impossibilità di prevederne l'accadimento e per la capacità distruttiva liberata di intensità estremamente variabile, l'azione sismica rappresenta una delle azioni di più difficile gestione per lo strutturista.

Nei paesi sviluppati più soggetti ad eventi di questo tipo, per necessità di garantire la sicurezza strutturale degli edifici progettati e costruiti, sono stati sviluppati negli anni codici e norme atti ad agevolare il compito dell'ingegnere. La prima prescrizione di questo tipo è stata redatta in seguito al terremoto del Kanto, in Giappone, del 1923 e imponeva nella progettazione di tener conto di una forza orizzontale sulla struttura pari al 10% di quella verticale agente.



Figura 1-1 Effetti del terremoto del Kanto nel 1923

Questa semplice regola fu adottata successivamente negli Stati Uniti d’America in risposta al terremoto di Long Beach del 1933 andando ad imporre al progettista di considerare agente sulla struttura un sistema di forze orizzontali pari all’8% di quelle verticali [4].



Figura 1-2 Effetti del terremoto di Long Beach (CA) nel 1933

Negli anni trenta del secolo scorso, sempre in California, la diffusione degli strumenti di registrazione dei dati riguardanti gli eventi sismici di recente invenzione permise inoltre di registrare l’accelerazione al suolo dei terremoti. Si notò così che a fronte di strutture progettate per resistere a forze orizzontali dovute ad un’accelerazione al suolo dell’8% della forza di gravità, sismi caratterizzati da un rapporto accelerazione al suolo – accelerazione di gravità a_g/g fino a 3 volte maggiore non erano in grado di causare collassi strutturali. Dall’assenza di collassi strutturali e dallo studio delle strutture comunque danneggiate, anche se non crollate, si capì allora l’importanza della duttilità e della capacità dissipativa in campo plastico delle strutture sottoposte ad azione sismica.

Per molti anni a venire si ritenne quindi l’utilizzo delle strutture impiegate capaci di forti escursioni in campo plastico il corretto modo di costruire [13]. Ricorrendo

alla capacità della struttura di sopportare azioni in campo plastico risulta infatti possibile dimensionarla per azioni inferiori, come si era appunto decretato dal comportamento delle strutture californiane non crollate sebbene sottodimensionate, con ovvi vantaggi di natura economica.

Dagli anni 60 del ventesimo secolo la tipologia strutturale ritenuta più duttile, e pertanto maggiormente adatta all'utilizzo in zone ad elevato rischio sismico, dai progettisti statunitensi era quella dei telai in acciaio saldati. Ritenuti a torto pressoché invulnerabili agli eventi sismici e con la capacità di sostenere danni solo sotto forma di snervamento localizzato e mai come collasso strutturale. Le connessioni di questi telai erano realizzate saldando le flange delle travi a quella del pilastro e bullonando l'anima della trave al pilastro tramite angolari come in figura.



Figura 1-3 Dettaglio di connessione "bolted-web welded-flange"

I telai saldati in acciaio strutturale, o all'inglese *welded steel moment resisting frames* (WSMF), sono una tipologia strutturale di grande utilizzo in California e

negli Stati Uniti in generale per la costruzione di edifici multipiano medio alti. Questa tipologia strutturale a causa dell'alto grado di iperstaticità e quindi della vasta ridondanza di meccanismi di collasso permette di conferire una notevole duttilità e capacità dissipativa alla struttura nel comportamento a rottura. Questo vantaggio permette di portare in secondo piano la flessibilità, spesso caratteristica dimensionante, che rende questa tipologia costruttiva meno attraente in un'analisi in campo puramente elastico. Un vantaggio non strutturale che rende di esteso utilizzo questo genere di struttura portante è l'assenza di elementi di controvento, molto limitanti sul piano architettonico.

La duttilità del sistema è garantita dalla presenza di tre tipi di meccanismi dissipativi ad ogni nodo trave pilastro. Il meccanismo dissipativo preferibile nei telai saldati però è solo quello di formazione di cerniere plastiche in corrispondenza dell'estremità della travi. Risulta infatti importante garantire che la formazione di cerniere plastiche non si localizzi in corrispondenza dei pilastri o nel pannello nodale al fine di evitare fenomeni di piano soffice [2].

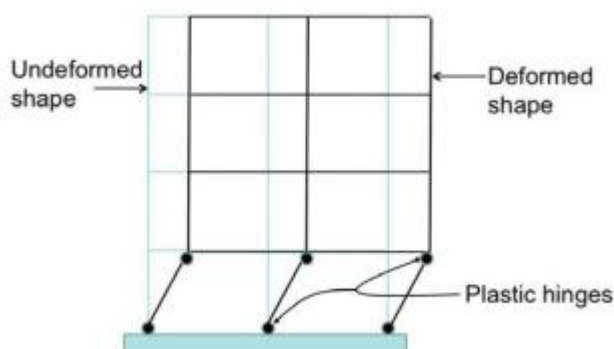


Figura 1-4 Meccanismo di formazione di piano soffice

Nel 1994 il terremoto verificatosi a Northridge in California però mise in crisi le certezze avute fino a quel momento sull'utilizzo di edifici con struttura a telaio saldato. I telai soggetti a rotture fragili durante il sisma rispettavano infatti, a fronte di semplici restrizioni di natura geometrica presenti nei codici statunitensi, la filosofia costruttiva di trave debole e pilastro forte. Ciò nonostante il sistema costruttivo non rispettò le attese caratteristiche di duttilità. Molti degli edifici

danneggiati dal sisma di Northridge infatti presentavano rotture fragili molto prossime alla giunzione della trave con il pilastro con sviluppo di pochissima plasticizzazione se non addirittura nulla [3].

In risposta ai problemi sollevati dal terremoto verificatosi, nacque quindi la necessità di ripensare le modalità di connessione tra pilastri e travi per i telai in acciaio con la formazione della SAC Joint Venture che univa le agenzie statunitensi Structural Engineers Association of California, Applied Technology Council e Consortium of Universities for Research in Earthquake Engineering. Contemporaneamente anche in Europa si andarono ad indagare meglio le modalità di collasso per fatica oligociclica.

Il principio di sfruttare la risposta in campo inelastico della struttura rimane infatti tutt'ora valida, andavano solo indagati meglio i dettagli costruttivi necessari a garantirlo.

Ai fini di capire il comportamento di una struttura o di una sua porzione sottoposta a sisma risultano di primaria importanza le prove quasi statiche cicliche. A fronte di costi relativamente contenuti degli apparati di prova se confrontati con quelli necessari all'esecuzione di un test dinamico questo tipo di prova permette comunque di indagare approfonditamente il comportamento post elastico di una struttura o di un dettaglio costruttivo. Le prove quasi statiche possono essere sia a spostamento che a forza impressa e possono imprimere lo spostamento o la forza con storie sia monotone che cicliche. Si può quindi ottenere un quadro piuttosto completo del comportamento della struttura in più aspetti di interesse a livello di comportamento a rottura quali i punti di localizzazione di cerniere plastiche, le zone di localizzazione di instabilità, i valori massimi di sollecitazione sopportabili dalla struttura. Chiaramente le informazioni tratte risulteranno al netto dell'effetto generato dalle forze di natura inerziale e viscosa, le quali ricoprono un ruolo non trascurabile nei fenomeni sismici.

Negli anni con lo sviluppo dei metodi numerici per l'analisi strutturale oltre alle prove sperimentali anche le simulazioni numeriche, comunque svolte a partire

Inquadramento del problema

dalla conoscenza di risultati di natura sperimentale, hanno assunto un ruolo sempre più importante ed è in questo campo che va ad inserirsi il lavoro sviluppato e che verrà presentato nei successivi capitoli della tesi.

2. PROBLEMI NON LINEARI

L'equazione governante un problema agli elementi finiti è:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{R}$$

dove \mathbf{K} rappresenta la matrice di rigidezza, \mathbf{u} il vettore spostamento e \mathbf{R} il vettore forze esterne.

Se \mathbf{K} e \mathbf{R} sono indipendenti da \mathbf{u} si parla di problema lineare per il quale vale la sovrapposizione degli effetti.

I problemi non lineari hanno invece \mathbf{K} e/o \mathbf{R} variabili con \mathbf{u} per uno o più dei seguenti motivi:

- non linearità di materiale: nella situazione in cui uno o più materiali del modello non abbiano una relazione lineare tra σ ed ε
- non linearità geometrica: per problemi caratterizzati da spostamenti non infinitesimi
- non linearità di frontiera: per problemi in cui le condizioni al contorno variano al variare di \mathbf{u}

Il problema in un'analisi non lineare è l'individuazione dell'equilibrio di un corpo in corrispondenza al carico applicato, cioè:

$${}^t\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F} = 0$$

con ${}^t\mathbf{R}$ vettore dei carichi nodali esterni al tempo t e ${}^t\mathbf{F}$ le forze nodali corrispondenti allo stato tensionale degli elementi al tempo t .

La relazione ${}^t\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F} = 0$ rappresenta l'equilibrio del sistema nella configurazione deformata corrente tenendo conto di tutte le fonti di non linearità.

La soluzione per ragioni di natura computazionale viene individuata per incrementi di carico o spostamento.

Supponendo nota la soluzione al tempo t si va a cercare la soluzione al tempo $t+\Delta t$ e cioè:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = 0$$

Poiché le forze nodali ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = 0$ dipendono non linearmente dagli spostamenti nodali risulta necessario individuare la soluzione iterativamente.

Verranno in seguito riportati vari metodi a disposizione nel programma ad elementi finiti con il problema trattato, governato da non linearità, di materiale e di geometria.

I metodi per la soluzione del problema non lineare si dividono in due principali famiglie, i metodi indiretti e i metodi diretti. Poiché nello sviluppare il presente lavoro sono stati utilizzati solutori di tipo indiretto nei paragrafi successivi verranno trattati solo questi ultimi.

2.1 METODI INDIRETTI DI SOLUZIONE

Al fine di risolvere il sistema di equazioni differenziali non lineari che può governare un problema agli elementi finiti un ramo di vasto utilizzo nei software commerciali è quello dell'uso di metodi indiretti di soluzione. Questi metodi di soluzione indiretti sono così detti in quanto, anziché andare ad individuare in modo diretto la soluzione cercata, ne ottengono il valore per successive approssimazioni. Le iterazioni vengono svolte fintanto che la soluzione non

rispetta una tolleranza prefissata. Il primo metodo sviluppato è stato quello di Newton-Raphson, che verrà in seguito presentato, dal quale poi sono stati derivati quelli trattati successivamente.

2.1.1 IL METODO DI NEWTON-RAPHSON

L'individuazione dell'equilibrio in un problema agli elementi finiti è riassumibile in:

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}^*) = 0$$

$$\text{con } \mathbf{f}(\mathbf{U}^*) = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}(\mathbf{U}^*) - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}(\mathbf{U}^*) = 0$$

e \mathbf{U}^* vettore delle incognite soluzione (spostamenti generalizzati, pressione, temperatura, eccetera).

Essendo ad ogni passo temporale la soluzione individuata iterativamente, poniamo noto ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{i-1}$ e allora sviluppando \mathbf{f} in serie di Taylor troncata al primo termine:

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}^*) \cong \mathbf{f}({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{i-1}) + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{t+\Delta t \mathbf{U}^{i-1}} (\mathbf{U}^* - {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{i-1})$$

$$\text{ottenendo quindi } {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}(\mathbf{U}^*) - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{i-1} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{t+\Delta t \mathbf{U}^{i-1}} (\mathbf{U}^* - {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{i-1})$$

$$\text{posto } \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{t+\Delta t \mathbf{U}^{i-1}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{i-1} \text{ matrice di rigidezza tangente all'iterazione } i-1 \text{ al}$$

passo temporale $t+\Delta t$

si potrà valutare l'incremento di spostamento con

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{i-1} \Delta \mathbf{U}^i = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}(\mathbf{U}^*) - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{i-1}$$

e la soluzione verrà aggiornata come ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^i = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{i-1} + \Delta \mathbf{U}^i$

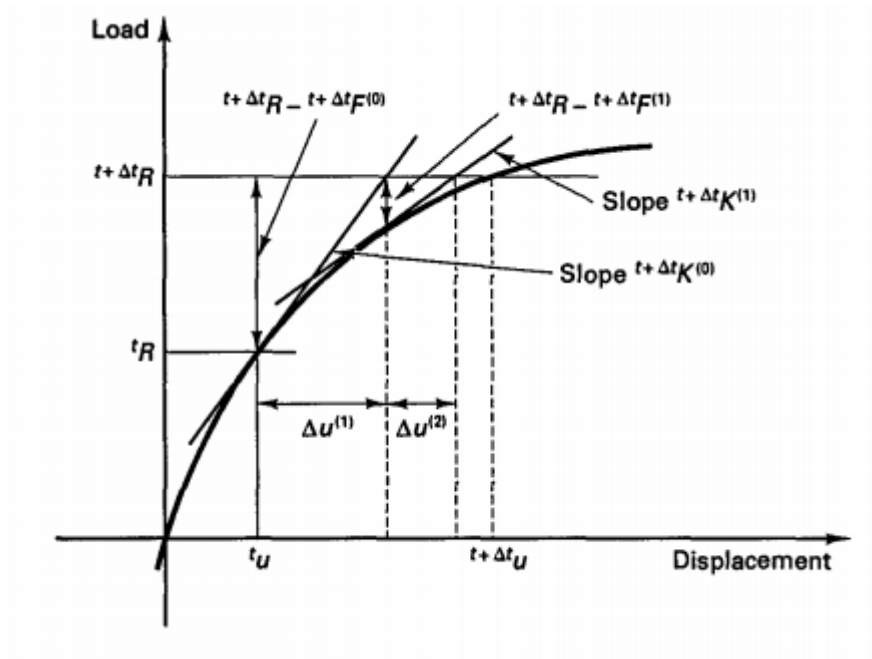


Figura 2-1 Illustrazione del metodo di Newton-Raphson per un sistema ad un grado di libertà

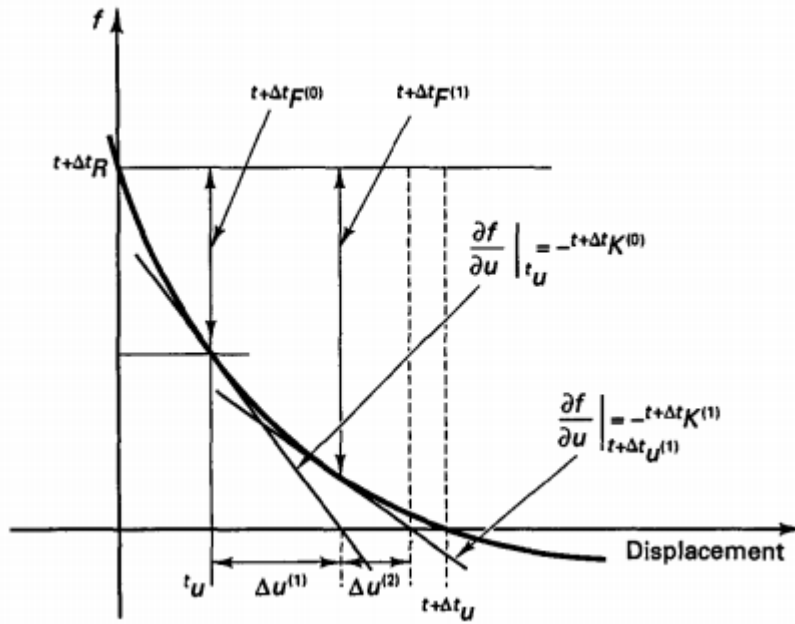


Figura 2-2 Illustrazione dell'iterazione per individuare $f=0$

Il metodo di Newton-Raphson è caratterizzato da convergenza per $t+\Delta t \mathbf{U}^{i-1}$ appartenente ad un intorno di \mathbf{U}^* se la matrice di rigidezza $t+\Delta t \mathbf{K}^{i-1}$ non è

singolare, cioè ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{i-1}$ sarà più vicino a \mathbf{U}^* e la convergenza è quadratica se la matrice di rigidezza soddisfa la continuità di Lipschitz, cioè:

$$\left\| {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}|_{\mathbf{U}_1} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}|_{\mathbf{U}_2} \right\| \leq L \|\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2\| \text{ per } \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2 \text{ in un intorno di } \mathbf{U}^* \text{ e } L > 0$$

Lo svantaggio del metodo consiste nell'elevato costo computazionale ad ogni iterazione per il calcolo della matrice di rigidezza \mathbf{K} .

Metodo di Newton-Raphson modificato

Questo problema può essere risolto con l'utilizzo di metodi Newton-Raphson modificati dove la matrice \mathbf{K} è aggiornata solo occasionalmente (fino al mantenerla invariata a partire dalla prima iterazione).

L'attrattiva del metodo modificato sta nella maggior velocità di soluzione di problemi caratterizzati da una non linearità non troppo pronunciata.

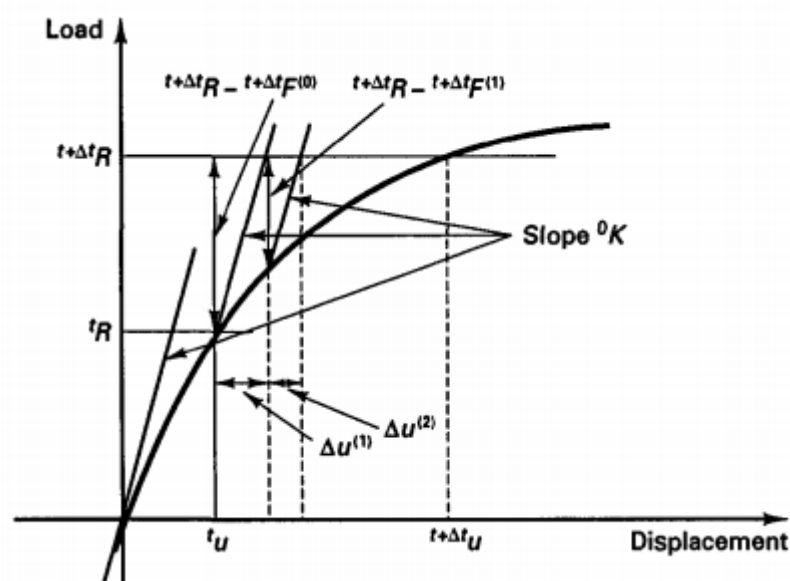


Figura 2-3 Illustrazione del metodo di Newton-Raphson modificato per un sistema ad un grado di libertà

Metodo quasi-Newton BFGS

Un'alternativa sono i metodi quasi-Newton tra i quali viene qui presentato il metodo BFGS (da Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno).

Stabilito un incremento di spostamento:

$$\delta^i = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^i - {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{i-1}$$

e un incremento di carichi non equilibrati:

$$\gamma^i = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^i - {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{i-1}$$

la matrice aggiornata rispetterà la condizione quasi-Newton:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^i \delta^i = \gamma^i$$

Il metodo BFGS valuta come incremento di spostamento:

$$\Delta \bar{\mathbf{U}} = \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{-1} \right)^{(i-1)} \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} \right)$$

Andando con questo vettore ad individuare una “direzione” per l’effettivo spostamento. A questo punto nella direzione stabilita si va a cercare di soddisfare l’equazione di equilibrio individuando un opportuno vettore spostamento aggiornato:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)} + \beta \Delta \bar{\mathbf{U}}$$

Con β moltiplicatore scalare.

La ricerca dell’equilibrio viene pertanto effettivamente svolta andando a far variare β fino al raggiungimento della condizione di convergenza:

$$\Delta \bar{\mathbf{U}}^T \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i)} \right) \leq \text{TOLL} \Delta \bar{\mathbf{U}}^T \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} \right)$$

Ed allora si andrà a determinare il valore definitivo di ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)}$ con la formula precedentemente presentata.

A questo punto si aggiornerà la matrice di rigidezza:

$$\left({}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{-1}\right)^{(i)} = \mathbf{A}^{(i)T} \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{-1}\right)^{(i-1)} \mathbf{A}^{(i)}$$

con:

$$\mathbf{A}^{(i)} = \mathbf{I} + \mathbf{v}^{(i)} \mathbf{w}^{(i)T}$$

e i vettori $\mathbf{v}^{(i)}$ e $\mathbf{w}^{(i)}$ calcolati noti forze e spostamenti nodali all'iterazione precedente $\boldsymbol{\gamma}^{(i)}$ e $\boldsymbol{\delta}^{(i)}$:

$$\mathbf{v}^{(i)} = - \left(\frac{\boldsymbol{\delta}^{(i)T} \boldsymbol{\gamma}^{(i)}}{\boldsymbol{\delta}^{(i)T} {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} \boldsymbol{\delta}^{(i)}} \right) {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} \boldsymbol{\delta}^{(i)} - \boldsymbol{\gamma}^{(i)}$$

$$\mathbf{w}^{(i)} = \frac{\boldsymbol{\delta}^{(i)}}{\boldsymbol{\delta}^{(i)T} \boldsymbol{\gamma}^{(i)}}$$

Essendo inoltre il prodotto $\mathbf{A}^{(i)T} \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{-1}\right)^{(i-1)} \mathbf{A}^{(i)}$ definito positivo, al fine di evitare aggiornamenti che potrebbero generare problemi di natura numerica, il coefficiente $c^{(i)}$ della matrice $\mathbf{A}^{(i)}$ è calcolato con:

$$c^{(i)} = \left(\frac{\boldsymbol{\delta}^{(i)T} \boldsymbol{\gamma}^{(i)}}{\boldsymbol{\delta}^{(i)T} {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} \boldsymbol{\delta}^{(i)}} \right)^{1/2}$$

Per poi essere paragonato ad una tolleranza, un valore relativamente elevato. L'aggiornamento non viene eseguito nel caso in cui $c^{(i)}$ superi la tolleranza.

Va inoltre precisato che nell'effettiva applicazione del metodo, la direzione di incremento dello spostamento viene calcolata come:

$$\Delta \bar{\mathbf{U}} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{v}^{(i-1)} \mathbf{w}^{(i-1)T} \right)^T \dots \left(\mathbf{I} + \mathbf{v}^{(1)} \mathbf{w}^{(1)T} \right)^T {}^t\mathbf{K}^{-1} \left(\mathbf{I} + \mathbf{v}^{(1)} \mathbf{w}^{(1)T} \right) \dots \left(\mathbf{I} + \mathbf{v}^{(i-1)} \mathbf{w}^{(i-1)T} \right) \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} \right)$$

Pertanto, non serve calcolare esplicitamente le matrici aggiornate o svolgere fattorializzazioni delle matrici, operazioni computazionalmente costose, come è invece necessario fare nel caso del metodo di Newton-Raphson classico ma basta conoscere il valore della matrice di rigidezza all'inizio dell'incremento di tempo.

2.2 NON-LINEARITÀ DI MATERIALE

La teoria della plasticità è la teoria matematica delle deformazioni irreversibili indipendenti dal tempo [11]. Per metalli e leghe questo fenomeno è dovuto al movimento delle dislocazioni a livello microscopico dei cristalli. Gli spostamenti degli atomi che ne conseguono risultano irreversibili e producono quindi deformazioni irreversibili nel metallo a livello macroscopico. A seguire verranno trattate le schematizzazioni matematiche usate per rappresentare proprio questo comportamento macroscopico.

Introduciamo il semplice sistema rappresentato in figura:

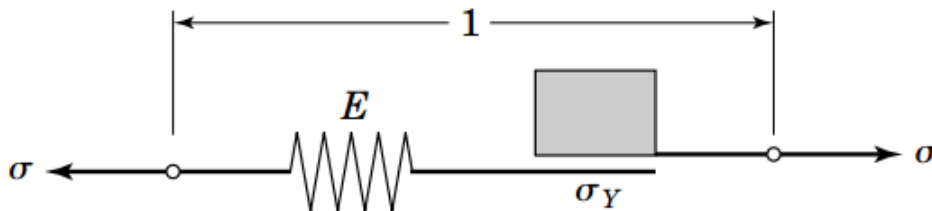


Figura 2-4 Sistema attritivo che rappresenta la plasticità monodimensionale rateo-indipendente [1]

composto da una molla di modulo elastico E collegata ad un elemento ad attrito *Coulombiano* di costante $\sigma_Y > 0$. Agli estremi del sistema è applicata una tensione σ cui corrisponde una deformazione ε . La deformazione totale è suddivisibile in due componenti, una sulla molla ε_e detta deformazione elastica e una sul dispositivo ad attrito *Coulombiano* ε_p detta deformazione plastica e cioè:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

e per avere equilibrio dovrà valere la relazione:

$$\sigma = E\varepsilon_e = E(\varepsilon - \varepsilon_p).$$

Assumendo che deformazioni e tensioni siano funzioni del tempo in un intervallo $[0, T]$ avremo il rateo della deformazione plastica:

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t}$$

Per avere un cambiamento nella configurazione dell'elemento ad attrito si dovrà avere $\dot{\varepsilon}_p \neq 0$. Per caratterizzare questo comportamento facciamo allora le seguenti assunzioni. Assumiamo per prima cosa che la tensione sull'elemento ad attrito non possa essere più grande di $\sigma_Y > 0$. Ne risulta che le tensioni ammissibili per il sistema appartengono all'intervallo chiuso $[-\sigma_Y, \sigma_Y]$ e cioè con un'altra notazione:

$$\mathbf{E}_\sigma = \left\{ \sigma \in \mathbf{R} \mid f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_Y \leq 0 \right\}$$

f è detta condizione di snervamento ed \mathbf{E}_σ rappresenta l'insieme chiuso convesso delle tensioni σ ammissibili. La seconda assunzione è che per valori assoluti di σ inferiori a σ_Y non si avranno variazioni di ε_p e cioè:

$$\dot{\varepsilon}_p = 0 \text{ se } f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_Y < 0$$

e quindi per $f(\sigma) < 0$ varrà $\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}$ e la risposta del sistema sarà elastica secondo la costante E della molla. Per questo si definisce campo elastico il seguente insieme aperto:

$$\text{int}(\mathbf{E}_\sigma) = \left\{ \sigma \in \mathbf{R} \mid f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_Y < 0 \right\}.$$

Poiché per la prima assunzione fatta le tensioni ammissibili rispettano $f \leq 0$ e inoltre $\dot{\varepsilon}_p = 0$ se $f < 0$ per quanto deciso come seconda assunzione si avrà che una variazione di deformazione plastica sarà possibile solo se $f = 0$ e allora l'elemento

ad attrito scivolerà in modo costante nella direzione della tensione applicata. Posto allora la regola di flusso *flow rule* $\gamma = |\dot{\varepsilon}_p|$ si avrà:

$$\dot{\varepsilon}_p = \gamma \geq 0 \text{ se } \sigma = \sigma_Y > 0$$

$$\dot{\varepsilon}_p = -\gamma \leq 0 \text{ se } \sigma = -\sigma_Y < 0$$

Si definirà inoltre il contorno dell'insieme \mathbf{E}_σ :

$$\partial \mathbf{E}_\sigma = \{\sigma \in \mathbf{R} \mid f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_Y = 0\} \text{ superficie di snervamento.}$$

Serve a questo punto andare a determinare $\gamma = |\dot{\varepsilon}_p|$. Poiché per le assunzioni fatte finora γ risulta nullo per $f < 0$ e positivo per $f = 0$ ne consegue che il loro prodotto risulta sempre nullo:

$$\gamma f = 0 \text{ condizione detta di Kuhn-Tucker}$$

Si scriverà infine la condizione di consistenza, la quale corrisponde al requisito di natura fisica che per $\gamma > 0$ $\sigma \in \partial \mathbf{E}_\sigma$ debba permanere sulla superficie di snervamento:

$$\gamma \dot{f} = 0$$

Nel caso trattato, tramite semplici passaggi matematici, quindi si avrà che $\gamma = \dot{\varepsilon} \text{sign}(\sigma)$.

2.2.1 INCRUDIMENTO CINEMATICO

Nell'acciaio si verifica sperimentalmente che la tensione massima raggiungibile dal materiale risulta superiore alla tensione di snervamento, si parla quindi di comportamento incrudente *-hardening*.

Nei metalli soggetti a carichi di natura ciclica con inversione di segno, è sperimentalmente osservato che il centro della superficie di snervamento si muove nella direzione dello scorrimento plastico -*plastic flow*- e un semplice modello in grado di catturare questo fenomeno, sebbene non la totalità del fenomeno di carico ciclico di un solido metallico, è rappresentato dall'incrudimento cinematico rateo indipendente [11].

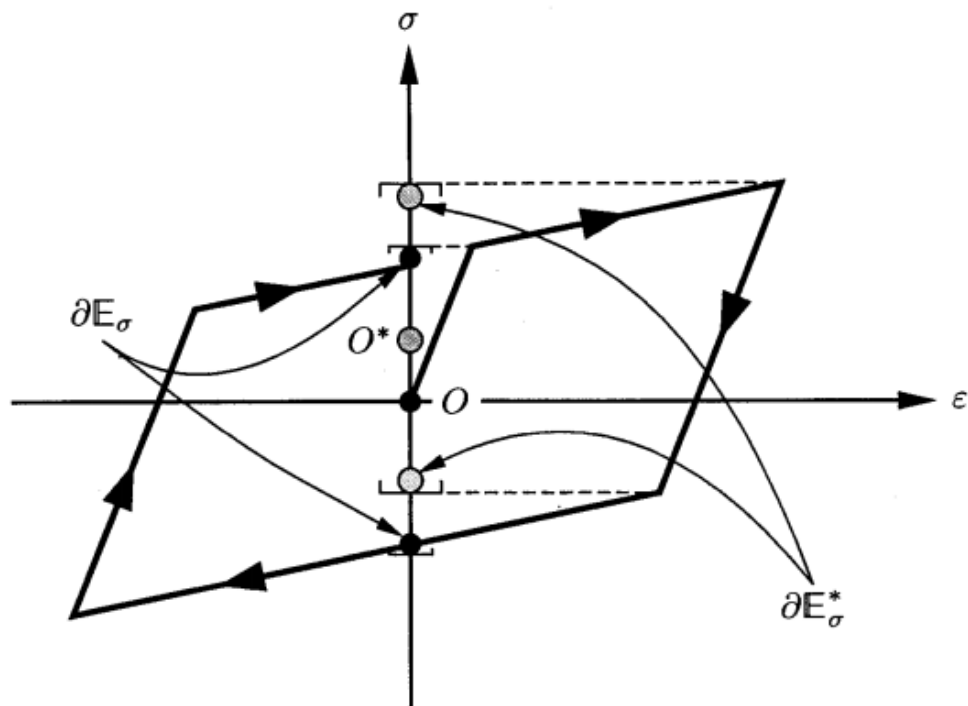


Figura 2-5 Illustrazione schematica del comportamento dell'incrudimento cinematico

L'altro comune modello di incrudimento, cioè l'incrudimento isotropo rateo indipendente risulta inadeguato per situazioni di carico ciclico, in quanto tende ad un comportamento elastico al passare dei cicli.

Andando quindi a caratterizzare le variabili che descrivono la teoria della plasticità al fine di andare a impostare il comportamento definito incrudimento cinematico rateo indipendente si avranno le seguenti equazioni governanti:

-scomposizione della deformazione totale:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

-relazione tensione deformazione:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p)$$

-criterio di snervamento e definizione del dominio elastico

$$f_{(\sigma,q)} := |\sigma - q| - \sigma_y \leq 0$$

dove $\sigma_y > 0$ e $q > 0$ sono costanti del materiale, rispettivamente dette tensione di snervamento e *back stress*.

L'evoluzione del *back stress* è definita dalla regola di Ziegler (legge di incrudimento cinematico):

$$\dot{q} = H \dot{\varepsilon}_p = \gamma H \text{sign}(\sigma - q)$$

dove H è una costante del materiale ed è detto modulo di incrudimento cinematico

$$\mathbf{E}_\sigma = \left\{ (\sigma, x_1, x_2, \dots) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \mid f_{(\sigma,q)} \leq 0 \right\}$$

-regola di flusso -*flow rule*:

$$\gamma = |\dot{\varepsilon}_p|$$

esprimibile anche come:

$$\dot{\varepsilon}_p = \gamma \text{sign}(\sigma - q)$$

-condizioni di Kuhn-Tucker

$$\gamma f_{(\sigma,q)} = 0$$

-condizioni di consistenza

$$\gamma \dot{f}_{(\sigma,q)} = 0 \text{ se } f_{(\sigma,q)} = 0$$

L'incrudimento cinematico risulta comunque un modello di caratterizzazione del comportamento del materiale estremamente semplificato non tenendo questo conto fra le tante cose di *ratcheting*, rilassamento della tensione media, transizione tra fase elastica e plastica non brusca.

2.2.2 MECCANICA DEL DANNO

Il fenomeno di danno rappresenta la progressiva perdita di capacità meccaniche di un corpo [11].

Questo fenomeno è dovuto ad un processo reologico differente da quello della deformazione sebbene generato dalla stessa causa, che nel caso di corpi omogenei metallici è il movimento e l'accumulo di dislocazioni.

Il danno è inoltre caratterizzato da una spiccata irreversibilità tale da rendere solo parzialmente efficaci i trattamenti termici al fine di ripristinare le condizioni iniziali.

Un materiale è definibile privo di danno quando a livello microscopico sono assenti cavità e fratture, a livello pratico questo si fa coincidere con lo stato iniziale del materiale anche se non è effettivamente vero in quanto lo stato privo di danno rappresenta una idealizzazione. Lo stato finale del danno invece è rappresentabile con la frattura macroscopica del materiale. La meccanica del danno è quindi lo studio del comportamento del materiale tra lo stato non danneggiato e la comparsa di fratture macroscopiche.

Il deterioramento delle caratteristiche meccaniche può essere dovuto ad una varietà di processi:

- grandi deformazioni plastiche nei metalli
- fatica da cicli di carico

- ossidazione
- corrosione

La teoria del danno studia quindi tutti i tipi di materiali sotto le più diverse condizioni di carico meccanico, termico e chimico.

Definizione della variabile di danno

La definizione di una variabile meccanica di danno risulta complessa. Macroscopicamente un volume di materiale vergine e uno di materiale danneggiato sono pressoché indistinguibili ed è quindi necessario immaginare variabili interne rappresentative dello stato di deterioramento della materia.

Si può ricorrere a misurazioni a livello microstrutturale di densità di microfratture e microcavità da utilizzare per la formulazione di teorie microstrutturali da integrare in volumi macroscopici tramite opportuna omogeneizzazione.

Alternativamente è possibile effettuare misurazioni globali di densità o resistività per poi formulare un modello globale da convertire poi in proprietà meccaniche.

Consideriamo ora un solido danneggiato di cui un volume rappresentativo è stato isolato. Questo volume piccolo è comunque sufficientemente grande rispetto le manifestazioni microscopiche del fenomeno di danneggiamento.

Definendo come S la sezione del volume di normale \mathbf{n} , si avrà una porzione di questa sezione occupata dalle cavità e fratture generate dal danneggiamento.

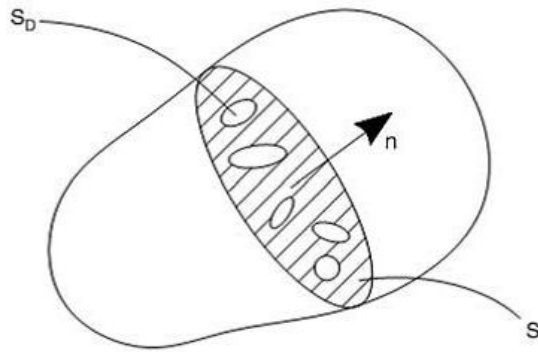


Figura 2-6 Schematizzazione di un materiale danneggiato

Poniamo allora \tilde{S} come area effettiva di materiale non danneggiato, si avrà pertanto sempre $\tilde{S} \leq S$ e durante il danneggiamento $\tilde{S} < S$. Posta:

$$S_D = S - \tilde{S}$$

l'area dei difetti si definisce variabile di danno:

$$D_n = \frac{S_D}{S}$$

quantità scalare che è misura locale del danno relativamente alla direzione \underline{n} .

Si avranno quindi i seguenti valori di D :

$D_n = 0$ in corrispondenza al materiale in stato vergine

$D_n = 1$ in corrispondenza al materiale completamente danneggiato

$0 \leq D_n \leq 1$ durante la fase di danneggiamento

Inoltre si aggiunge che nel caso di materiale isotropo la distribuzione di microfratture e microcavità sarà uniforme nelle varie direzioni e quindi D_n non sarà più funzione di n e si potrà allora porre:

$$D_n = D$$

Definizione di tensione effettiva

Da quanto precedentemente esposto si deve trarre un'altra conclusione. Durante il fenomeno di danneggiamento infatti, come detto, l'area effettiva di materiale in una sezione danneggiata si riduce da S in stato vergine a \tilde{S} in stato danneggiato.

Prendendo come esempio un caso di tensione monoassiale di un provino isotropo, la tensione ingegneristica relativa alla forza F sarà in stato vergine:

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

questo però non è vero per il caso danneggiato in cui la superficie cui fare riferimento risulta essere $\tilde{S} = S(1 - D)$ e quindi lo stress effettivo risulta essere:

$$\tilde{\sigma} = \sigma \frac{S}{\tilde{S}}$$

e cioè:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D}$$

risulta evidente come $\sigma \leq \tilde{\sigma}$ in ogni momento e in particolare si avrà:

$$\tilde{\sigma} = \sigma \text{ allo stato vergine}$$

$$\tilde{\sigma} \rightarrow \infty \text{ alla frattura}$$

Principio dell'equivalenza delle deformazioni

Si andrà inoltre ad assumere che durante il danneggiamento le relazioni tra deformazione e tensione valide nel materiale vergine diventino relazioni tra deformazione e tensione effettiva.

Ad esempio per danneggiamento in fase elastica di provino isotropo sottoposto a carico monoassiale si potrà scrivere:

$$\varepsilon_e = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{E(1-D)} \text{ con } E \text{ modulo di Young.}$$

Questa ipotesi non è rigorosa ma risulta adatta allo sviluppo della teoria e sufficientemente adatta a rappresentare la realtà fisica del fenomeno.

Criterio di inizio del danneggiamento

Il fenomeno di danno non si verifica in un provino dall'istante del primo carico. Per una porzione iniziale della storia di carico il comportamento è considerato come quello del materiale non danneggiato.

Risulta quindi necessario stabilire un criterio di inizio della fase di danneggiamento come può essere ad esempio un criterio tensionale o uno deformativo.

Si può infatti andare ad individuare una tensione –nel caso monoassiale- o una superficie –analoga alla superficie di snervamento, nel caso triassiale- oltre la quale il materiale presenta un comportamento danneggiato.

In alternativa è possibile definire una deformazione oltre la quale le caratteristiche meccaniche vanno a degradarsi.

Per l'acciaio un criterio aderente alla realtà sperimentale è quello di porre come criterio di inizio del danno il superamento della deformazione corrispondente alla tensione ultima ε_u [11].

Valore critico della variabile di danno a rottura

Andando ad applicare il concetto di tensione critica al momento della rottura del materiale è possibile individuare tramite prove sperimentali il valore della variabile di danno alla rottura, D_c danno critico.

Scrivendo la relazione tra tensione ultima e tensione critica al momento di rottura, indicando questo con il pedice u:

$$\tilde{\sigma}_u = \frac{\sigma_u}{1 - D_c}$$

e cioè:

$$D_c = 1 - \frac{\sigma_u}{\tilde{\sigma}_u}$$

Nel caso dei metalli questo valore è generalmente inferiore all'unità e per gli acciai è spesso nel campo di 0.4-0.7 [11].

Legge di evoluzione del danno per materiali plastici

Serve a questo punto andare ad individuare una legge evolutiva del parametro di danno D . Individuando il problema sul piano micro-strutturale, il danno coincide con la nucleazione, crescita e unione di micro-cavità indotte dalle grandi deformazioni plastiche cui il materiale è soggetto. Molte sono le proposte reperibili in letteratura, si riporteranno in seguito i due criteri più interessanti per quanto riguarda il lavoro svolto, inerenti quindi il danno duttile di un materiale plastico, qual è l'acciaio strutturale.

Legge di evoluzione del danno – criterio deformativo

Sperimentalmente è stato accertato che una buona approssimazione del comportamento del materiale può essere data da una legge di danno lineare in funzione della deformazione [11]. Andando ad esplicitare la legge di evoluzione del danno, per semplicità di trattazione, a livello monodimensionale si avrà in funzione della deformazione ε_v :

$$D = D_c \left\langle \frac{\varepsilon_v - \varepsilon_{vD}}{\varepsilon_{vR} - \varepsilon_{vD}} \right\rangle$$

dove ε_{vD} rappresenta la deformazione all'inizio del fenomeno di danno, prima della quale il danneggiamento del materiale risulta nullo o trascurabile, ε_{vR} la deformazione a rottura in corrispondenza della quale la variabile di danno

raggiunge il valore critico D_c . Le deformazioni presenti in questa legge sono tutte di tipo *true strain*, infatti le deformazioni durante questo fenomeno risultano non infinitesime. Le costanti ε_{vD} , ε_{vR} e D_c sono dipendenti dal tipo di materiale utilizzato.

Legge di evoluzione del danno – criterio energetico

Un'alternativa alla formulazione deformativa della legge di evoluzione del danno è rappresentata da un criterio energetico [7]. L'energia di frattura per unità di volume sarà quindi:

$$E_f = \int_{\varepsilon_0^{pl}}^{\varepsilon_f^{pl}} \sigma_y d\varepsilon^{pl}$$

Andando a indicare con ε_0^{pl} la deformazione di inizio danneggiamento –nel nostro caso pari a $\varepsilon_{u,pl}$ - e con ε_f^{pl} e la deformazione alla fine del processo di danneggiamento. Andando a ipotizzare anche in questo caso un'evoluzione lineare e andando nuovamente ad esplicitare le leggi d'evoluzione per il caso monodimensionale si avrà:

$$\dot{d} = \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\varepsilon_f^{pl}}$$

Con la deformazione a rottura ottenuta con:

$$\varepsilon_f^{pl} = \frac{2E_f}{\sigma_{y0}}$$

L'evoluzione della variabile di danno potrà quindi essere riscritta come:

$$\dot{d} = \frac{\dot{\varepsilon}^{pl} \sigma_{y0}}{2E_f}$$

e si avrà quindi che la variazione della variabile di danno dipende dall'evoluzione della deformazione plastica proporzionalmente al valore dell'energia specifica di frattura.

3. ANALISI ENERGETICA

La conservazione dell'energia implicata dalla prima legge della termodinamica dice che la variazione del tempo dell'energia cinetica e interna di un corpo equivale alla somma della variazione nel tempo del lavoro svolto da forze di massa e superficie [7] e cioè:

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \rho U dV = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV$$

Con:

ρ densità di massa

\mathbf{v} vettore velocità

U energia interna per unità di massa

\mathbf{t} vettore delle forze di superficie $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$

\mathbf{f} vettore delle forze di massa

\mathbf{n} normale alla superficie S del corpo V .

Per il teorema di Gauss, la simmetria di $\boldsymbol{\sigma}$ e l'eguaglianza $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} : \boldsymbol{\sigma} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\sigma}$ si avrà

inoltre:

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} dS = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} : \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \cdot \mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\sigma} dV$$

Con $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ rateo del tensore di deformazione.

Poiché si ha anche l'equazione del moto in forma locale:

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Sostituendo le ultime due equazioni nell'equazione di conservazione dell'energia si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \rho U dV = \int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV = \int_V \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV$$

E quindi l'equazione dell'energia:

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \rho \frac{dU}{dt}$$

Che integrata nel tempo e nello spazio:

$$\int_0^t \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \int_V \rho U dV + U_0$$

Con U_0 energia del sistema all'istante iniziale 0. Allo stesso tempo si può scrivere il bilancio di energia integrato nel tempo come:

$$\int_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \int_V \rho U dV = \int_0^t \dot{E}_{WF} d\tau + \text{costante}$$

Dove $\dot{E}_{WF} = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV$ rappresenta il rateo del lavoro delle forze esterne

ed $E_K = \int_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV$ l'energia cinetica.

Per definizione si avrà anche:

$$E_U = \int_0^t \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV d\tau - U_0 = \int_V \rho U dV$$

Senza ulteriormente trattare l'energia cinetica, in quanto le analisi svolte sono state di tipo statico si andranno a trattare con maggior precisione le altre due grandezze appena presentate, E_U e \dot{E}_{WF} risultando queste di maggior interesse per la trattazione in quanto scomponendo nelle loro varie componenti deformazioni e tensioni sarà possibile scomporle nelle varie grandezze energetiche capaci di descrivere i processi studiati.

3.1 LAVORO DELLE FORZE ESTERNE

Si può suddividere la forza di superficie \mathbf{t} in carico distribuito \mathbf{t}^l e trazione dovuta all'attrito. Si potrà allora scrivere il rateo del lavoro delle forze esterne come:

$$\dot{E}_{WF} = \left(\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^l dS + \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV \right) - \left(- \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^f dS \right) = \dot{E}_W - \dot{E}_F$$

dove \dot{E}_W rappresenta il rateo del lavoro svolto dalle forze esterne di massa e superficie sul corpo e \dot{E}_F il rateo dell'energia dissipata per attrito.

3.2 ENERGIA INTERNA

Andando a separare la dissipazione viscosa E_V dall'energia interna E_I e considerando nulla U_0 :

$$E_U = \int_0^t \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV d\tau = \int_0^t \int_V (\boldsymbol{\sigma}^c + \boldsymbol{\sigma}^v) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV d\tau = \int_0^t \int_V \boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV d\tau + \int_0^t \int_V \boldsymbol{\sigma}^v : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV d\tau = E_I + E_V$$

Con $\boldsymbol{\sigma}^c$ tensione data dalle equazioni costitutive e $\boldsymbol{\sigma}^v$ tensione dovuta agli effetti viscosi.

Andando ora a scomporre le deformazioni nelle loro componenti, rispettivamente, elastica, plastica e viscosa $\boldsymbol{\epsilon}^{el}$, $\boldsymbol{\epsilon}^{pl}$, $\boldsymbol{\epsilon}^{cr}$ si avrà in termini di rateo delle deformazioni:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{el} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{cr}$$

E quindi sostituendo nella definizione dell'energia interna:

$$E_I = \int_0^t \int_V \boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV d\tau = \int_0^t \int_V \boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} dV d\tau + \int_0^t \int_V \boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} dV d\tau + \int_0^t \int_V \boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{cr} dV d\tau = E_{EL} + E_{PL} + E_{CR}$$

con E_{EL} , E_{PL} e E_{CR} rispettivamente energia elastica, plastica e viscosa interne.

Includendo anche una legge di danno sarà necessario porre:

$$\boldsymbol{\sigma}^c = (1-d) \boldsymbol{\sigma}^u$$

con $\boldsymbol{\sigma}^u$ tensione del materiale non danneggiato e d variabile di danno.

Assumendo che in fase di scarico il parametro di danno rimanga fisso al valore raggiunto all'istante t d_t .

Si avranno allora le seguenti formulazioni per l'energia elastica interna:

$$E_I = \int_0^t \int_V (1-d_t) \boldsymbol{\sigma}^u : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} dV d\tau$$

E l'energia dissipata con il danneggiamento:

$$E_D = \int_0^t \int_V (d_t - d) \boldsymbol{\sigma}^u : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} dV d\tau$$

Risulta di interesse anche la quantità definita *artificial strain energy* calcolata da Abaqus, il software agli elementi finiti utilizzato per l'esecuzione delle analisi presentate in questa tesi, come energia di deformazione elastica dovuta alla piccola rigidità introdotta dal programma per eliminare effetti di *hourglassing* e *drilling* (per quanto riguarda il presente lavoro solo *drilling* in quanto gli elementi completamente integrati utilizzati non soffrono di *hourglassing*). Questa energia deve risultare contenuta, arrivando al massimo a valori del 10% delle altre energie in gioco, ed è quindi utilizzabile come indice di una buona analisi non lineare. Per incrementi di carico o spostamento eccessivi ad ogni passo di soluzione, infatti, il suo valore risulta elevato. Mantenerne i valori al di sotto della soglia garantisce

che gli incrementi utilizzati nella soluzione siano invece adeguati al problema affrontato. Un altro fattore che incide significativamente sullo sviluppo di valori di *artificial strain energy* eccessivamente elevati è la scarsa discretizzazione del modello e in particolare quando vengono usate mesh eccessivamente grossolane in zone dove sono presenti elevati gradienti deformativi. Mantenerne quindi valori contenuti può fungere da indicazione su una discretizzazione adeguata del modello, o meglio, si può dire che in caso di valori troppo alti di questa grandezza risulta consigliabile valutare se la discretizzazione scelta è sufficientemente fine per il problema.

4. CAMPAGNA SPERIMENTALE DI RIFERIMENTO

In seguito ai problemi riscontrati in strutture in acciaio intelaiate precedentemente esposti e a causa della scarsità di dati sperimentali e letteratura riguardanti il fenomeno fu avviato un programma sperimentale di prova, eseguito presso il “Laboratorio Prove Materiali dell’Istituto Superiore Tecnico di Lisbona”.

4.1 CAMPIONI TESTATI

Nell’ambito della campagna sperimentale di riferimento sono stati progettati, fabbricati e sottoposti a prova 18 provini in scala reale (3 serie per 6 provini) rappresentativi di nodi saldati trave-colonna di strutture intelaiate di acciaio. Nel presente lavoro si andrà a studiare una sola di queste serie, denominata BCC6.

Il provino consiste di una colonna di 1800mm di sezione HE200B (riportata nel disegno in orizzontale, analogamente alla posizione durante le prove) su cui è saldata una trave IPE300 di lunghezza 1000 mm. Il nodo trave-colonna è opportunamente irrigidito da piatti saldati all’anima della colonna. Ulteriori piatti sono saldati all’anima della trave in corrispondenza al punto di applicazione della forza tramite martinetto.

In figura sono riassunte le caratteristiche geometriche dei provini BCC6 e nella successiva tabella sono riportate le caratteristiche delle sezioni.

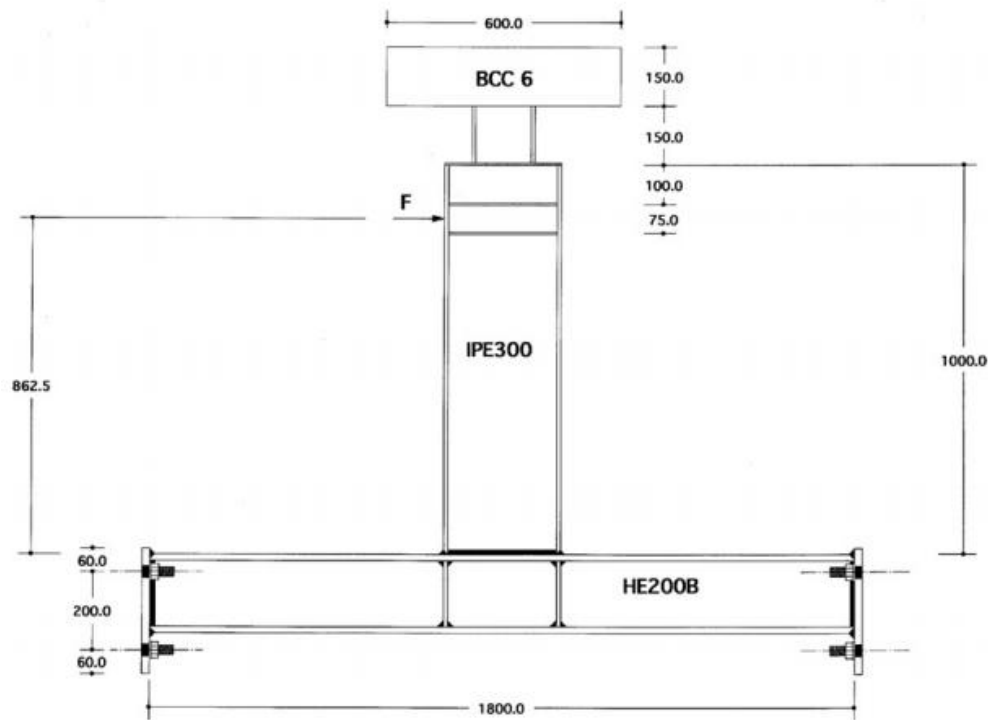


Figura 4-1 Caratteristiche geometriche dei provini BCC6

	Trave IPE300	Colonna HE200B
h [mm]	300	200
b [mm]	150	200
t_w [mm]	7.1	9
t_f [mm]	10.7	15

Tabella 4-1 Principali caratteristiche geometriche delle sezioni

Il collegamento tra campioni da testare e contrasto è effettuato tramite bulloni passanti su piastre saldate in testa alle estremità della colonna.

4.2 L'APPARATO DI PROVA

In figura è rappresentato il set di prova utilizzato per la sperimentazione. Esso è essenzialmente composto da una trave di reazione in cemento armato, una trave di

base, un attuatore, un telaio di controventamento laterale ed una trave di contrasto trasversale.

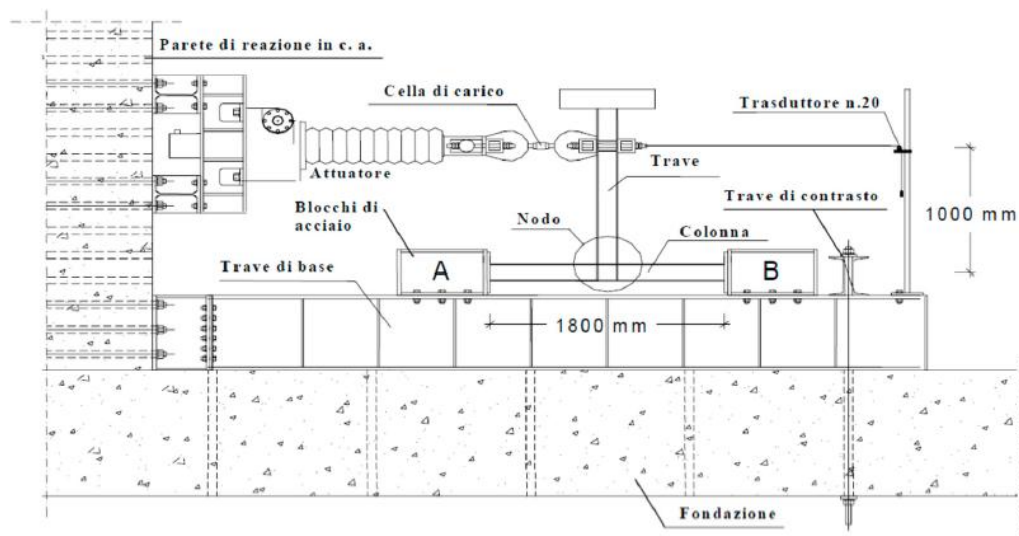


Figura 4-2 Apparato di prova sperimentale

La soletta di fondazione è costituita da una piastra in cemento armato dello spessore di 1000 mm nella quale sono praticati dei fori di 100 mm di diametro disposti su una maglia quadrata con lato 1000 mm. La trave di base è del tipo HE600B con 4400 mm di luce. La flangia superiore della trave ha due file di fori longitudinali di 26 mm. La distanza tra due file, così come la distanza tra due fori successivi in senso longitudinale è di 160 mm. Ciò permette l'adozione di diverse posizioni possibili per il monitoraggio del prototipo. La trave è fissata alla soletta di fondazione ed alla parete di reazione per mezzo di barre preserrate Dywidag alla suddetta trave trasversale.

La parete di reazione è in cemento armato con altezza di 3900 mm, larghezza di 3300 mm e spessore di 600 mm. Agli estremi della parete sono disposte due file di fori con 40 mm di diametro a distanza di 195 mm. Il passo tra loro è invece di 180 mm, il che permette diverse posizioni di montaggio dell'attuatore.

Il telaio, che costituisce il sistema di controventamento laterale, è stato progettato per evitare spostamenti laterali del prototipo durante la prova. A tal fine quattro

cuscinetti sono fissati al telaio e impediscono per contatto con la testa della trave il suo sbandamento laterale.

La trave di contrasto trasversale è posta allo scopo di evitare deformazioni eccessive della trave di base quando il carico è diretto verso la parete di reazione. Essa è composta da due profili d'acciaio a C accoppiate di altezza 310mm e base 100mm.

Due elementi di acciaio opportunamente progettati, fissati a loro volta alla trave di base con bulloni preserrati M30 classe 8.8, consentono il posizionamento del campione.



Figura 4-3Apparato di prova

4.3 STORIE DI CARICO

Le serie di provini del programma sperimentale, tra cui la serie BCC6, sono state sottoposte a diverse storie di carico, o meglio storie di spostamento in quanto gli esperimenti si sono svolti in controllo di spostamenti.

Al fine di indagare la capacità dissipativa del particolare nodo trave pilastro soggetto a spostamenti ciclici di diversa entità si è quindi deciso di sottoporre i provini a storie di carico cicliche a spostamento impresso. Il carico è inoltre stato

Campagna sperimentale di riferimento

applicato ad una velocità tale da poter considerare trascurabili gli effetti inerziali e si può quindi parlare di prove di carico quasi-statiche.

Si riporta nella seguente tabella le storie di carico cui sono stati sottoposti i provini, tra cui sono presenti una prova monotona crescente “E”, una ciclica ad ampiezza crescente “C”, tre cicliche ad ampiezza costante “A”, “B”, “D” e una ripetizione di una prova ad ampiezza costante “BB”.

Prova	d [mm]	d/d _y [/]	d/H [%]
A	±50	±5.0	±5.0
B	±75	±7.5	±7.5
BB	±75	±7.5	±7.5
C	cicli ad ampiezza crescente		
D	±37.5	±3.75	±3.75
E	prova con carico crescente monotono		

Tabella 4-2 Riassunto delle storie di carico

Per ogni prova ciclica, ad ampiezza costante e/o crescente, è stata impressa una storia di carico iniziale uguale in ogni caso con quattro cicli di ampiezza crescente in regime elastico e cioè con d/d_y pari rispettivamente a 0.25, 0.5, 0.75, 1 e cioè, essendo d_y=10mm, con d pari rispettivamente a 2.5mm, 5mm, 7.5mm, 10mm.

In seguito sono riportate le storie di carico in forma grafica. Non è stato necessario porre dei valori sull'asse del tempo in quanto le prove eseguite rientravano in regime quasi statico e pertanto il tempo risulta solamente una variabile fittizia.

Campagna sperimentale di riferimento

A

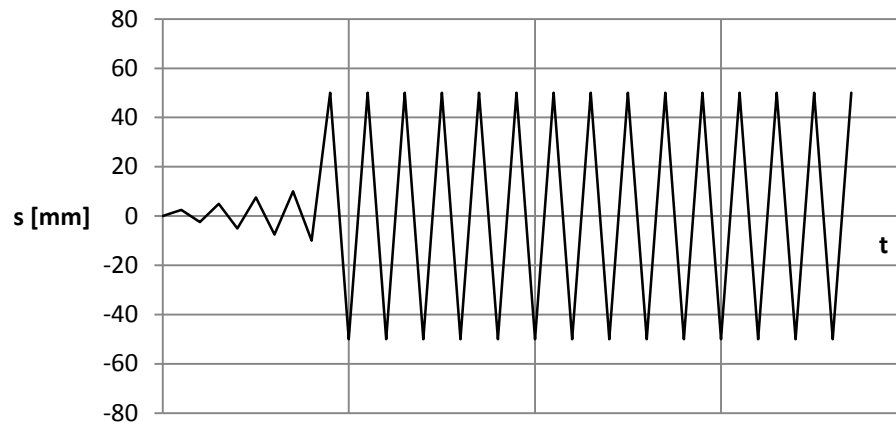


Grafico 4-1 Spostamento impresso al provino BCC6 - storia di carico A

B

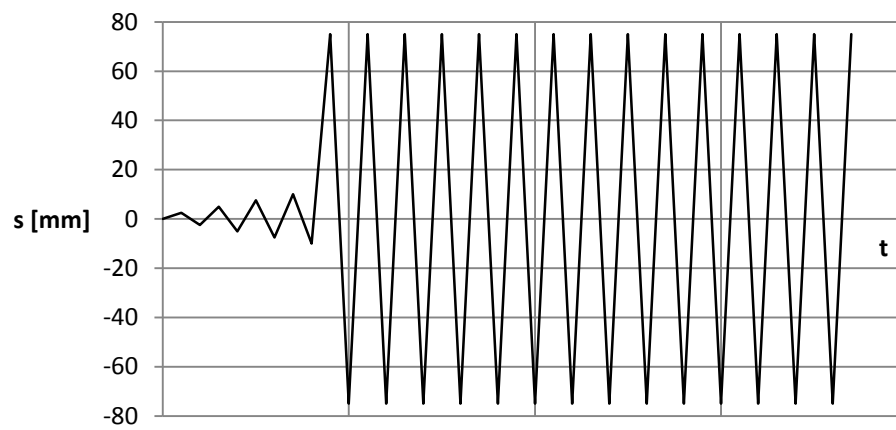


Grafico 4-2 Spostamento impresso al provino BCC6 - storia di carico B

Campagna sperimentale di riferimento

BB

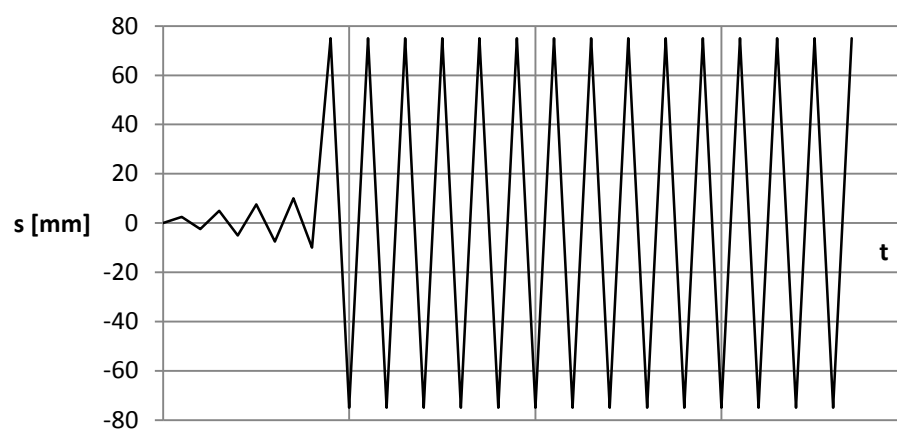


Grafico 4-3 Spostamento impresso al provino BCC6 - storia di carico BB

C

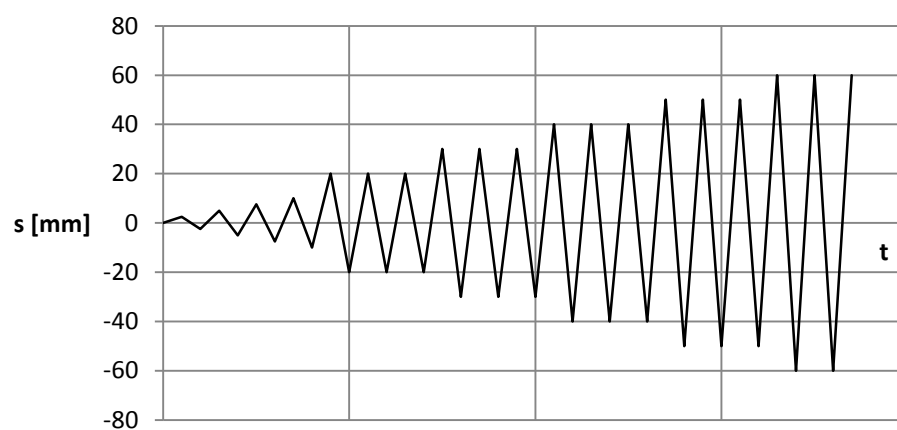


Grafico 4-4 Spostamento impresso al provino BCC6 - storia di carico C

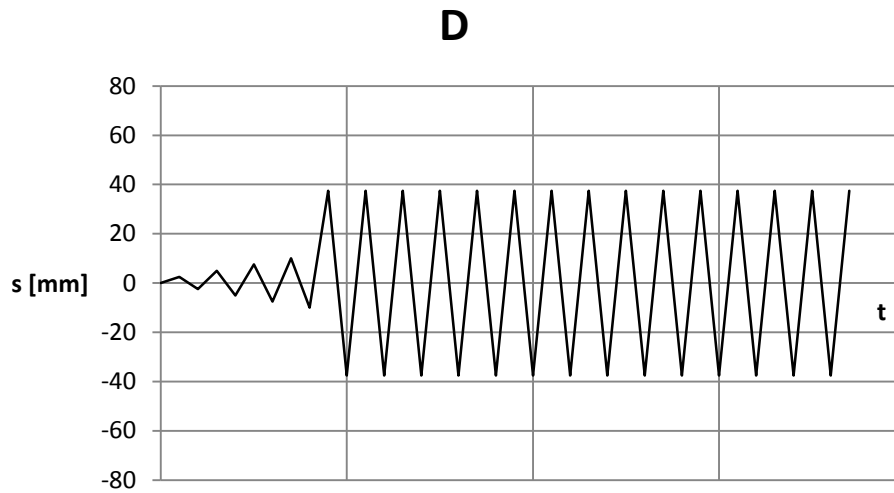


Grafico 4-5 Spostamento impresso al provino BCC6 - storia di carico D

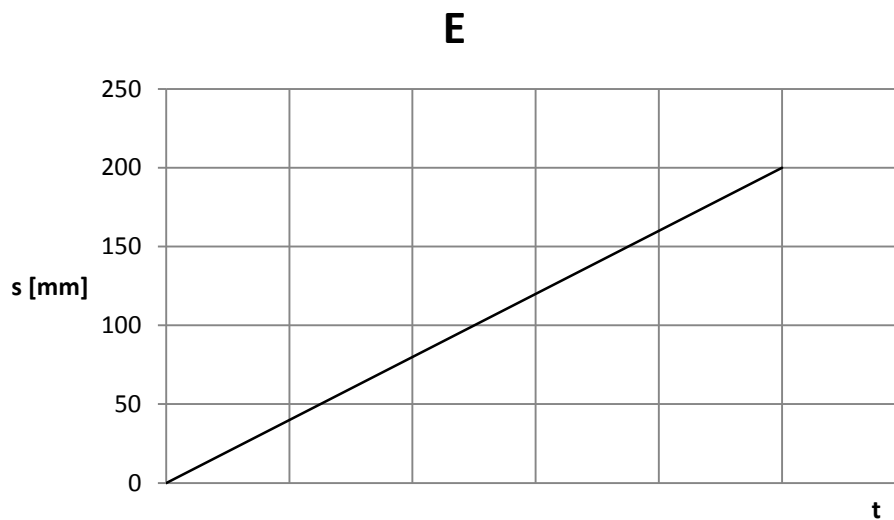


Grafico 4-6 Spostamento impresso al provino BCC6 - storia di carico E

4.4 PROPRIETÀ DEI MATERIALI

Le travi e le colonne utilizzate nella campagna sperimentale sono in acciaio S235 prodotto nel Regno Unito da British Steel. Sono state eseguite prove di trazione monoassiale sui provini prelevati da flange e anime di travi e colonne. Si riportano

in tabella i valori medi delle proprietà ottenute e per raffronto i valori caratteristici da normativa.

	Valori nominali	Trave IPE300		Colonna HE200B	
		Flangia	Anima	Flangia	Anima
f_y [MPa]	235	278.6	304.9	312.6	401.6
f_u [MPa]	360	398.8	411.4	434.9	489.8
f_u/f_y	1.53	1.43	1.35	1.39	1.22
ε_u [%]	/	37	34	37	22

Tabella 4-3 Resistenze meccaniche nominali e reali del campione

Le tensioni riportate sono di tipo *engineering stress* $\sigma = \frac{F}{A_0}$ e la deformazione

ultima riportata è di tipo *engineering strain* $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$.

4.5 RISULTATI DELLE PROVE SPERIMENTALI

Dai test svolti si è notato come il comportamento del dettaglio strutturale fosse diverso in funzione della storia di spostamento impressa al provino. Si potranno quindi distinguere tre comportamenti:

- Rottura fragile: per cicli di carico a spostamenti inferiori si avrà una perdita di rigidezza per fatica molto contenuta per poi avere una perdita improvvisa considerevole e improvvisa che porta al collasso.
- Rottura duttile: riscontrata per cicli a spostamento impresso elevato. La perdita di rigidezza è graduale durante l'intero processo portando ad un collasso progressivo.
- Rottura mista: situazione intermedia che si presenta per cicli dalla richiesta di duttilità non troppo elevata.

Campagna sperimentale di riferimento

Si definisce domanda di duttilità $\Delta S/S_y$ il rapporto tra ampiezza di spostamento impressa e spostamento convenzionale di snervamento.

4.5.1 BCC6-A

In questo caso la rottura è stata di tipo duttile e la frattura localizzata su flangia e anima della trave.

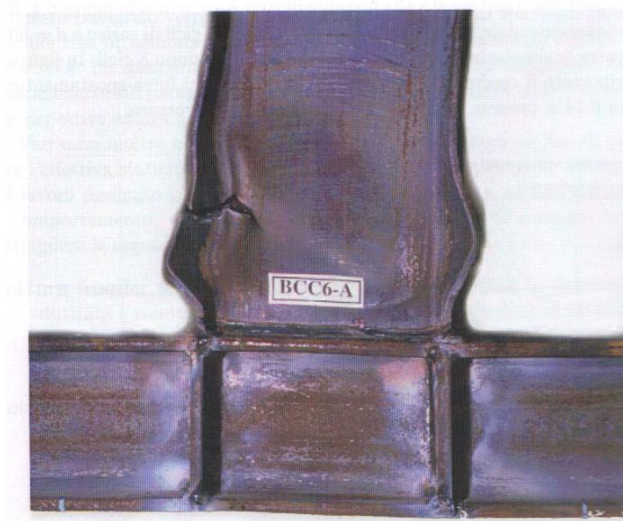


Figura 4-4 Dettaglio della rottura del provino BCC6-A

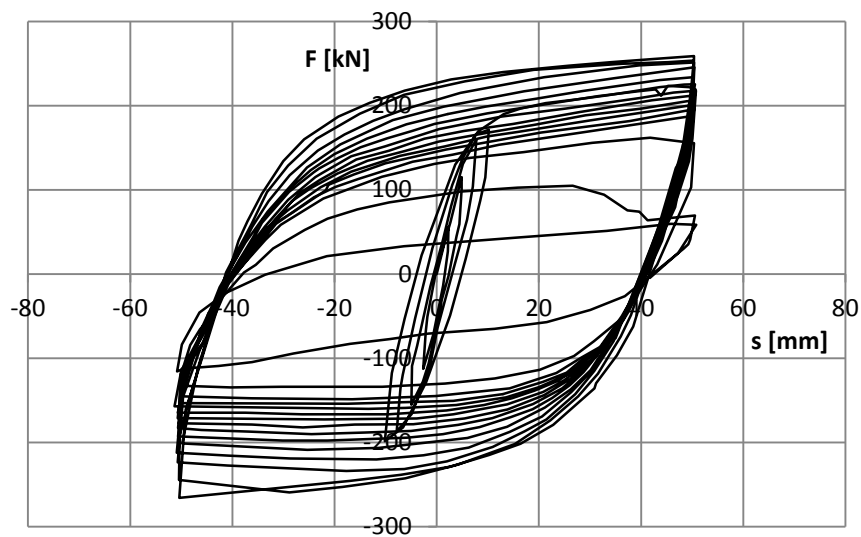


Grafico 4-7 Forza-spostamento provino BCC6 spostamento impresso A

4.5.2 BCC6-B E BCC6-BB

Anche per questa storia di spostamento impresso la rottura è stata di tipo duttile, con una perdita di rigidità progressiva ancora più pronunciata che per la storia di carico tipo A. La frattura risulta localizzata sulla flangia e anima della trave.



Figura 4-5 Dettaglio della rottura del provino BCC6-B

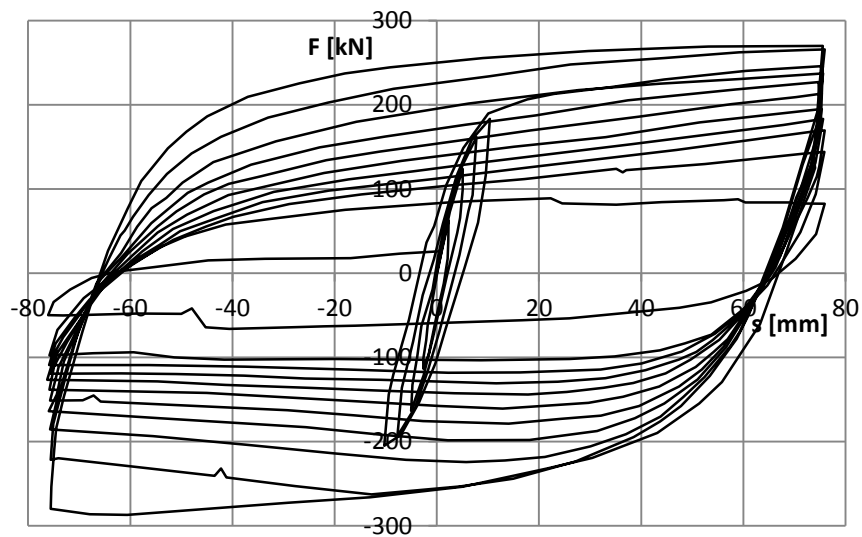


Grafico 4-8 Forza-spostamento provino BCC6 spostamento impresso B

Campagna sperimentale di riferimento



Figura 4-6 Dettaglio della rottura del provino BCC6-BB

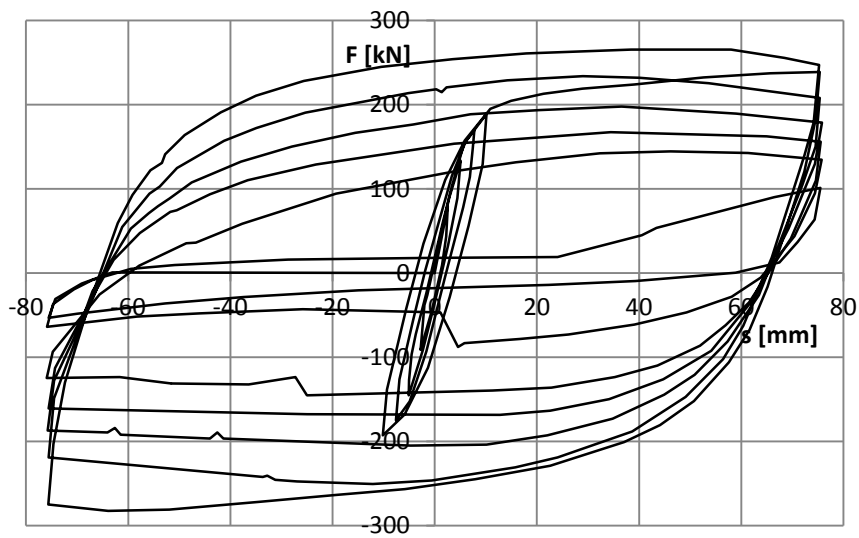


Grafico 4-9 Forza-spostamento provino BCC6 spostamento impresso BB

4.5.3 BCC6-C

In questo caso la rottura è stata di tipo misto e la frattura localizzata su flangia e anima della trave.



Figura 4-7 Dettaglio della rottura del provino BCC6-C

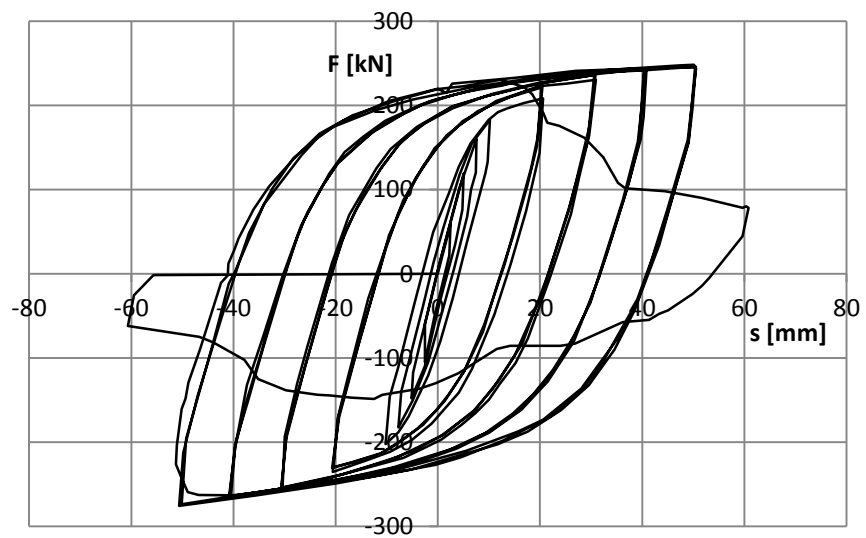


Grafico 4-10 Forza-spostamento provino BCC6 spostamento impresso C

4.5.4 BCC6-D

In questo caso la rottura è stata di tipo fragile in virtù del minor spostamento impresso al campione e la frattura ancora una volta localizzata su flangia e anima della trave.

Campagna sperimentale di riferimento



Figura 4-8 Dettaglio della rottura del provino BCC6-D

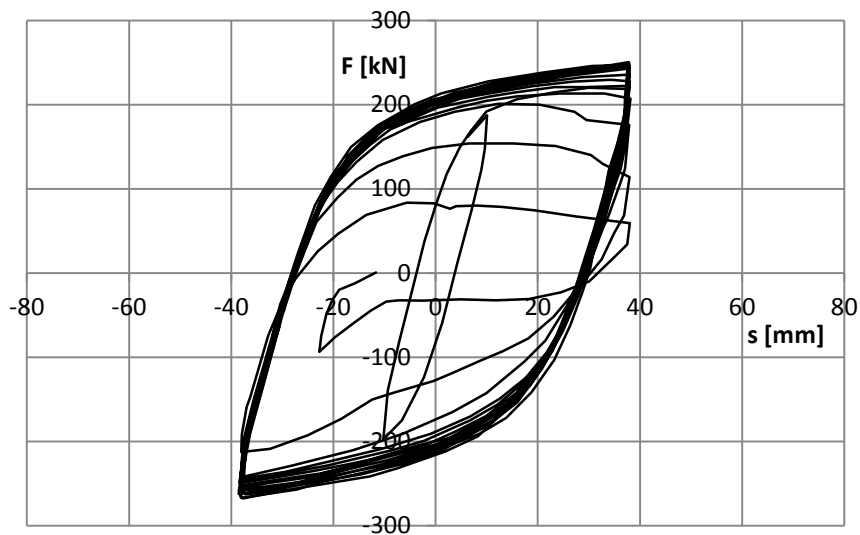


Grafico 4-11 Forza spostamento provino BCC6 spostamento impresso D

4.5.5 BCC6-E

Questa prova è stata svolta con uno spostamento massimo di 200 mm. Si ha instabilità localizzata sulla trave ma non una frattura.

Campagna sperimentale di riferimento



Figura 4-9 Dettaglio della deformazione del provino BCC6-E a spostamento ultimato

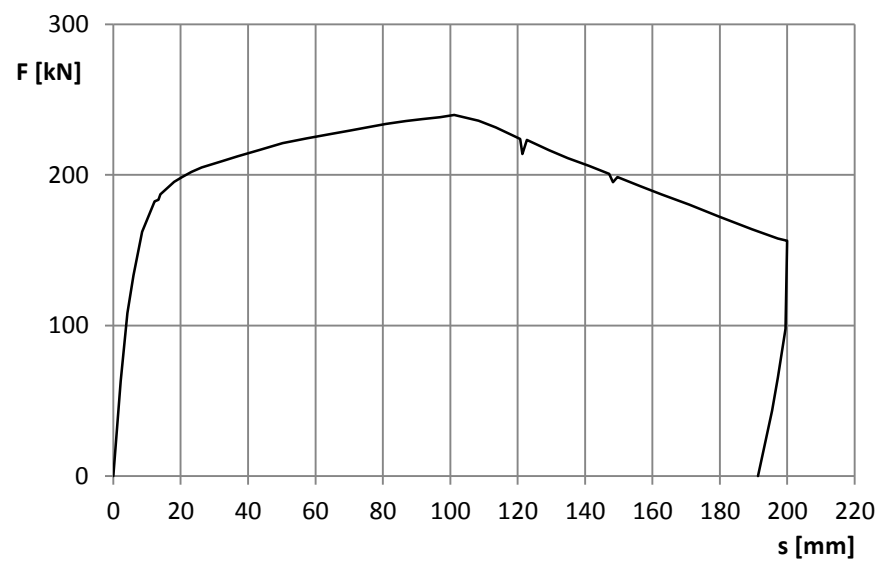


Grafico 4-12 Forza spostamento provino BCC6 spostamento impresso E

5. MODELLAZIONE AGLI ELEMENTI FINITI

Nel presente capitolo verranno descritte le fasi di creazione del modello agli elementi finiti usato per modellare i test sperimentali di riferimento.

Verranno trattate e descritte in ordine la modellazione della geometria del modello, la scelta del tipo di analisi, degli elementi utilizzati, e la modellazione di materiale e dei vincoli.

Per la modellazione delle prove di carico è stato scelto il software commerciale Abaqus.

La scelta è stata fatta nell'ottica di avere a disposizione, una volta creato il modello, solutori sia statici che dinamici, sia impliciti che espliciti, non conoscendo a priori quale strada percorribile sarebbe risultata la più efficiente.

5.1 MODELLAZIONE GEOMETRICA

Trave e colonna del provino sono state modellate con elementi *shell*. L'utilizzo di elementi beam era infatti sconsigliabile sia per la modesta lunghezza della trave se confrontata con le dimensioni della sezione (1m di lunghezza della trave per una sezione di altezza 30 cm), sia per il verificarsi di fenomeni di instabilità locale durante le prove sperimentali non replicabili in un modello a beam.

La modellazione con elementi *shell* rappresenta un'astrazione realistica. Si trascurano solo i raccordi tra anima e flangia per quanto concerne la geometria.

Si è inoltre deciso di non modellare il tratto di trave libero al di sopra dell'attuatore di spinta in quanto trascurabile ai fini della simulazione.

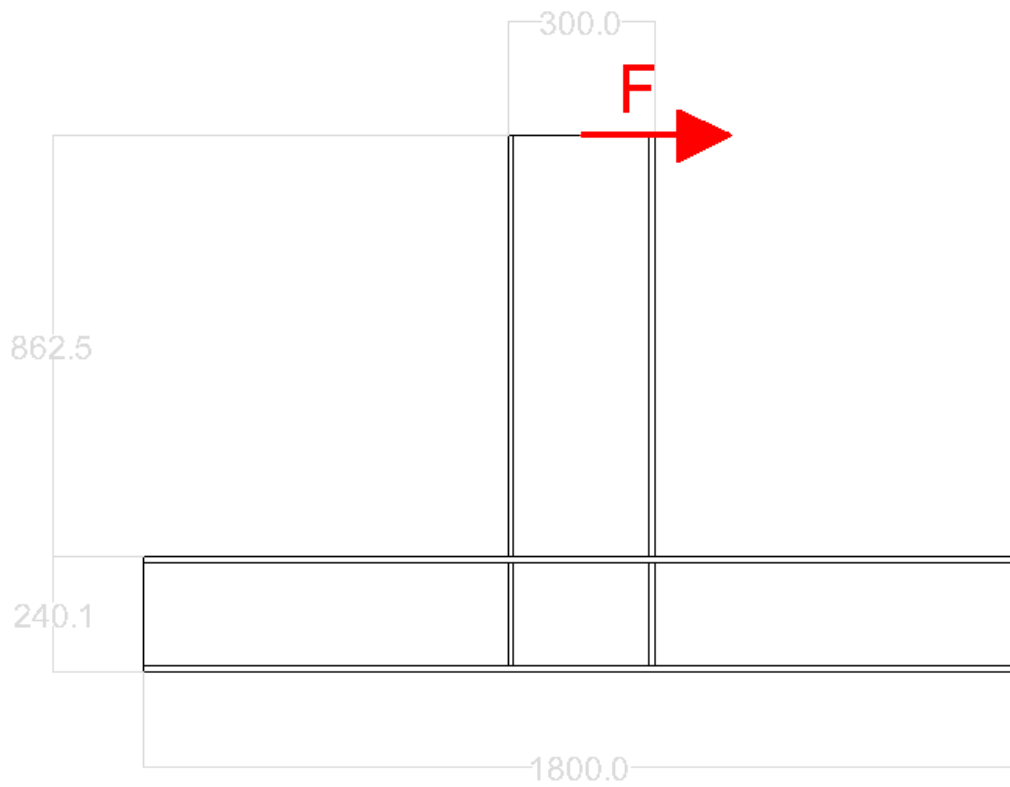


Figura 5-1 Geometria del modello

5.1.1 MESH

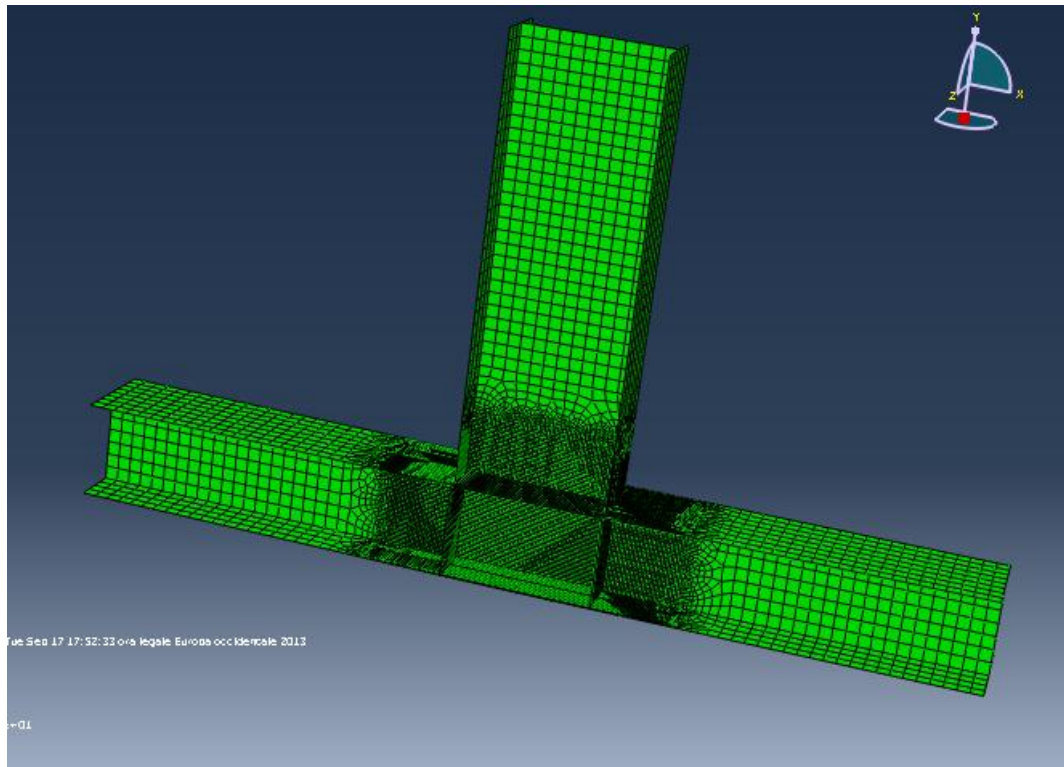


Figura 5-2 Mesh utilizzata

La mesh è suddivisibile in tre zone:

- Zona grossolana: in questa parte del modello sono utilizzati elementi quadrati 25×25 , i più grandi dell'intero modello. Sono stati scelti tali in modo in quanto nelle zone così discretizzate non si verificano fenomeni di plasticizzazione rilevanti e il numero risulta sufficiente a dare la corretta rigidezza del sistema. Risulta noto infatti come sia necessario un minor numero di elementi al fine di ottenere la corretta rigidezza nel modello rispetto a quanti ne servano per modellare correttamente l'andamento delle tensioni.
- Zona raffinata: in questa parte del modello sono utilizzati elementi quadrati 5×5 , i più piccoli dell'intero modello. Si è scelto di farli di queste dimensioni al fine di avere una discretizzazione sufficiente a descrivere i

complessi fenomeni non lineari in atto nella zona più prossima al nodo trave-pilastro.

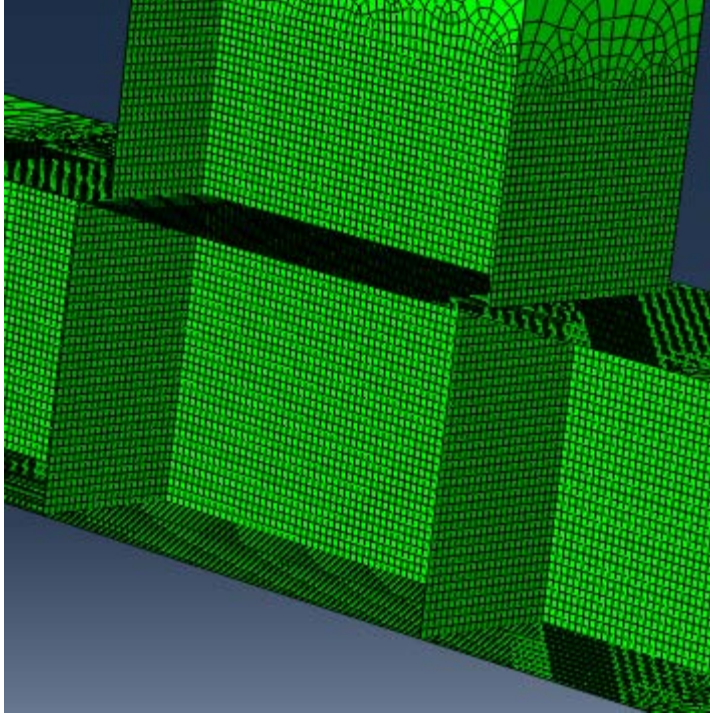


Figura 5-3 Dettaglio della zona raffinata della mesh

- Zona di transizione: la parte di modello che collega le precedenti due zone, realizzata automaticamente dal *mesh generator* di abaqus ed è composta da elementi quadrilateri e alcuni elementi triangolari.

5.1.2 ELEMENTI UTILIZZATI

La libreria di elementi di Abaqus offre elementi *shell* curvi che consentono la modellazione di superfici curve, strutture con materiali non lineari e composti, consentono di applicare la teoria dei grandi spostamenti.

Sono a disposizione elementi *shell* che forniscono soluzioni coerenti alla teoria sia di Mindlin (lastre deformabili a taglio) che di Kirchhoff (lastre sottili) ed elementi *shell* "general-purpose" che possono fornire entrambi i tipi di soluzione e che sono gli unici utilizzabili sia con il solutore esplicito che con il solutore implicito [7].

Verranno in seguito presentati gli elementi "general-purpose" in quanto quelli utilizzati nell'ambito del lavoro svolto.

Gli elementi “*general purpose*” forniscono soluzioni accurate per ogni condizione di carico. Lo spessore degli elementi varia in funzione della tensione membranale. Non risentono di *shear locking* e sono basati sulla teoria delle deformazioni finite.

In analisi on lineari per geometria effettuate con Abaqus/Standard lo spessore della sezione trasversale di elementi a deformazioni finite cambia in funzione della deformazione membranale e del coefficiente di Poisson ν . In Abaqus/Explicit lo spessore varia in funzione del coefficiente di Poisson ν , a meno di precisazioni dell'utente.

La variazione di spessore è calcolata come spiegato in seguito:

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

Essendo queste deformazioni logaritmiche allora:

$$\ln\left(\frac{t}{t^0}\right) = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\ln\left(\frac{l_1}{l_1^0}\right) + \ln\left(\frac{l_2}{l_2^0}\right)\right) = -\frac{\nu}{1-\nu}\ln\left(\frac{A}{A^0}\right)$$

Dove A rappresenta l'area della superficie di riferimento dell'elemento e l_1, l_2 le due dimensioni principali nel piano all'istante corrente. L'apice 0 indica il valore della grandezza all'istante iniziale.

Da questo si otterrà:

$$\frac{t}{t^0} = \left(\frac{A}{A^0}\right)^{-\frac{\nu}{1-\nu}}$$

In seguito si presenta la trattazione degli elementi tipo S4 in quanto quelli utilizzati prevalentemente nel modello creato.

Questi elementi sono stati scelti in quanto a disposizione con entrambi i solutori offerti da Abaqus e pertanto lasciavano aperta la strada ad una soluzione sia per via implicita sia per via esplicita sia passando da un solutore all'altro.

Descrizione geometrica

Ad ogni fase deformativa dell'elemento *shell*, la posizione di un punto materiale all'interno dell'elemento è definito da:

$$\mathbf{x}(S_i) = \bar{\mathbf{x}}(S_\alpha) + \bar{f}_{33}(S_\alpha) \mathbf{t}_3(S_\alpha) S_3$$

con i pedici latini a variare da 1 a 3 e i pedici greci a variare da 1 a 2.

Nella formula \mathbf{t}_3 rappresenta la normale alla superficie di riferimento dell'elemento e il gradiente della posizione è:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial S_\beta} = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial S_\beta} + \bar{f}_{33} \frac{\partial \mathbf{t}_3}{\partial S_\beta} S_3, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial S_3} = \bar{f}_{33} \mathbf{t}_3$$

avendo trascurato le derivate di \bar{f}_{33} rispetto S_β . Si noti come nella formula appena riportata S_α rappresentano le coordinate locali sulla superficie, assunte ortogonali tra loro. S_3 rappresenta la coordinata nella direzione dello spessore, ortogonale ad S_α nello stato di riferimento.

Nello stato deformato andiamo a definire le direzioni ortonormali all'elemento:

$$\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_j = \delta_{ij}, \quad \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_i = \mathbf{I} \text{ con } \delta_{ij} \text{ delta di Kronecker e } \mathbf{I} \text{ tensore identità di dimensione } 2 \times 2 \text{ e valida la convenzione della somma.}$$

Le componenti nel piano del gradiente della posizione sono date da:

$$f_{\alpha\beta} = \mathbf{t}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial S_\beta} = \bar{f}_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} \bar{f}_{33} S_3$$

avendo introdotto il gradiente di deformazione della superficie di riferimento:

$$\bar{f}_{\alpha\beta} = \mathbf{t}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial S_\beta} \bigg|_{S_3=0} = \mathbf{t}_\alpha \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial S_\beta}$$

e il gradiente della normale alla superficie di riferimento:

$$B_{\alpha\beta} = \mathbf{t}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{t}_3}{\partial S_\beta}$$

Nella configurazione di riferimento si indica la posizione come \mathbf{X} ($\bar{\mathbf{X}}$ per la superficie di riferimento) e i vettori direzione con \mathbf{T}_i , cioè:

$$\mathbf{X}(S_i) = \bar{\mathbf{X}}(S_\alpha) + \mathbf{T}_3(S_\alpha) S_3$$

Il gradiente della posizione quindi sarà:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial S_\beta} = \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial S_\beta} + \frac{\partial \mathbf{T}_3}{\partial S_\beta} S_3 \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial S_3} = \mathbf{T}_3$$

e le componenti nel piano del gradiente saranno date da:

$$f_{\alpha\beta}^o = \mathbf{T}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial S_\beta} = \delta_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta}^o S_3$$

posto che:

$$\mathbf{T}_\beta = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial S_\beta} \bigg|_{S_3=0} = \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial S_\beta}$$

e definito il gradiente della normale alla superficie di riferimento iniziale come

$$B_{\alpha\beta}^o = \mathbf{T}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{T}_3}{\partial S_\beta}$$

Il gradiente della normale alla superficie di riferimento è ottenuto nella formulazione agli elementi finiti dall'interpolazione delle normali nodali tramite

le funzioni di forma. In configurazione deformata non è derivato dalle normali nodali ma è aggiornato indipendentemente in funzione del gradiente dell'incremento di rotazione.

Interpolazione parametrica

La posizione dei punti nella superficie di riferimento locale è ottenuta per interpolazione parametrica con le funzioni di forma $N^I(\xi_\alpha)$ noti i valori nodali.

Le funzioni sono di classe C_0 , continue, e ξ_α sono le coordinate parametriche. Si avrà quindi:

$$\bar{\mathbf{x}}(\xi_\alpha) = N^I(\xi_\alpha) \bar{\mathbf{x}}^I \quad \bar{\mathbf{X}}(\xi_\alpha) = N^I(\xi_\alpha) \bar{\mathbf{X}}^I$$

I gradienti della posizione rispetto ξ_β sono:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \xi_\beta} = \frac{\partial N^I}{\partial \xi_\beta} \bar{\mathbf{x}}^I \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \xi_\beta} = \frac{\partial N^I}{\partial \xi_\beta} \bar{\mathbf{X}}^I$$

Gli apici in numeri romani indicano i nodi dell'elemento e se ripetuti implicano la convenzione della somma.

Considerando la configurazione iniziale la normale unitaria alla superficie di riferimento dell'elemento si ottiene come:

$$\mathbf{T}_3 = \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \xi_2} \right) / \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \xi_2} \right|$$

Conseguentemente si definiscono i due vettori ortonormali T_α , e le coordinate di misurazione della distanza S_α lungo i vettori T_α . Si avrà:

$$\frac{\partial S_\alpha}{\partial \xi_\beta} = \mathbf{T}_\alpha \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \xi_\beta} = \mathbf{T}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{X}}^I \frac{\partial N^I}{\partial \xi_\beta}$$

e

$$\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial S_\beta} = \left[\frac{\partial S_\alpha}{\partial S_\beta} \right]^{-1}$$

da cui si ottiene l'operatore gradiente:

$$\frac{\partial N^I}{\partial S_\beta} = \frac{\partial N^I}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial S_\beta}$$

Il gradiente della normale alla superficie di riferimento iniziale si ottiene come:

$$B_{\alpha\beta}^o = \mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{T}_\beta \frac{\partial N^I}{\partial S_\beta}$$

Poiché il gradiente della normale alla superficie di riferimento iniziale è ottenuto derivando le coordinate di misura della distanza si definirà $B_{\alpha\beta}^o = b_{\alpha\beta}^o$ curvatura iniziale della superficie di riferimento.

Deformazione e curvatura membranale

Definito l'inverso del gradiente di deformazione della superficie di riferimento:

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = \left[\bar{f}_{\alpha\beta} \right]^{-1}$$

Possiamo definire così l'operatore gradiente nella configurazione attuale:

$$\frac{\partial}{\partial S_\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial S_\alpha}, \text{ o invertendo } \frac{\partial}{\partial S_\beta} = \bar{f}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial S_\alpha}$$

L'operatore gradiente in configurazione attuale può essere scritto come:

$$t_\alpha \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial S_\beta} = t_\alpha \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial S_\gamma} \bar{h}_{\gamma\beta} = \bar{f}_{\alpha\gamma} \bar{h}_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

quindi

$$t_\alpha = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial s_\alpha}$$

e poiché:

$$\bar{f}_{\alpha\gamma} \bar{h}_{\gamma\beta} = \mathbf{t}_\alpha \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \bar{\mathbf{X}}} \mathbf{T}_\gamma \mathbf{T}_\gamma \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{t}_\beta = \mathbf{t}_\alpha \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \bar{\mathbf{X}}_\gamma} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{t}_\beta = \mathbf{t}_\alpha \cdot \mathbf{t}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$$

allora:

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = \mathbf{T}_\alpha \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial s_\beta}$$

In un'analisi incrementale possiamo definire anche il tensore di deformazione incrementale e il suo inverso:

$$\Delta \bar{f}_{\alpha\beta} = \mathbf{t}_\alpha^{t+\Delta t} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}^{t+\Delta t}}{\partial s_\beta^t} \text{ e il suo inverso } \Delta \bar{h}_{\alpha\beta} = \mathbf{t}_\alpha^t \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}^t}{\partial s_\beta^{t+\Delta t}}$$

Tramite il sistema di coordinate locale definito nella configurazione corrente, il gradiente della normale può essere trasformato nella curvatura della superficie:

$$b_{\alpha\beta} = \mathbf{t}_\alpha^t \cdot \frac{\partial \mathbf{t}_3}{\partial s_\beta} = B_{\alpha\gamma} \bar{h}_{\gamma\beta}$$

Aggiornamento dell'orientazione

Le equazioni riportate in precedenza sono valide per il sistema di coordinate locali definito nella configurazione corrente. I vettori \mathbf{t}_α all'inizio dell'analisi sono determinati seguendo le convenzioni standard di Abaqus.

Per aggiornare \mathbf{t}_α si segue un approccio a due passi. Prima si costruiscono i vettori ortogonali $\hat{\mathbf{t}}_\alpha$ tangenti la superficie e in seguito si calcola:

$$f_{\alpha\beta} = \hat{\mathbf{t}}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^{t+\Delta t}}{\partial S_\beta}$$

Successivamente si applica la rotazione nel piano $\Delta R_{\alpha\beta}$ ai vettori $\hat{\mathbf{t}}_\alpha$:

$$\Delta R_{11} = \Delta R_{22} = \cos \Delta \Psi$$

$$\Delta R_{21} = -\Delta R_{12} = \sin \Delta \Psi$$

con $\Delta \Psi$ determinato in modo da ottenere il tensore di deformazione risultante simmetrico come:

$$\bar{f}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\gamma} f_{\gamma\beta} = f_{\gamma\alpha} R_{\beta\gamma} = \bar{f}_{\beta\alpha}$$

da questo segue:

$$\tan \Delta \Psi = \frac{(f_{12} - f_{21})}{f_{11} + f_{22}}$$

e pertanto:

$$\bar{\mathbf{t}}_\alpha^{t+\Delta t} = \Delta R_{\alpha\gamma} \hat{\mathbf{t}}_\gamma$$

è l'aggiornamento della direzione materiale locale.

Cambio di curvatura

Assumiamo che la rotazione nodale sia interpolata tramite funzioni di forma nel dominio dell'elemento. Durante un incremento la rotazione nodale è assunta costante e conseguentemente il valore in ogni punto, essendo ottenuto per interpolazione, lo sarà. Quindi si possono usare le stesse funzioni interpolanti per il vettore delle rotazioni finite incrementali:

$$\Delta \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\omega} \Delta t = N^I(\xi_\alpha) \boldsymbol{\omega}^I \Delta t = N^I(\xi_\alpha) \Delta \boldsymbol{\phi}^I$$

Il vettore delle rotazioni finite può essere suddiviso in ampiezza di rotazione $\Delta\phi$ scalare e vettore asse di rotazione \mathbf{p} :

$$\Delta\phi = \Delta\phi p \text{ con } \Delta\phi = |\Delta\phi| \text{ e } \mathbf{p} = \Delta\phi / \Delta\phi$$

La rotazione nodale incrementale è rappresentata da $\Delta\mathbf{q}$:

$$\Delta\mathbf{q} = \left(\cos \frac{\Delta\phi}{2}, \sin \frac{\Delta\phi}{2} \mathbf{p} \right)$$

e la normale alla superficie aggiornata è ottenuta come:

$$\tilde{\mathbf{t}}_3^{t+\Delta t} = \Delta\mathbf{q} \mathbf{t}_3^t \Delta\mathbf{q}$$

Questa normale aggiornata non necessita di essere calcolata, è usata solo per il calcolo di cambio di curvatura. Risulta inoltre differente dalla normale $\mathbf{t}_3^{t+\Delta t}$ alla superficie al successivo incremento, scelta in seguito come ortogonale alla superficie. La normale aggiornata risulta approssimativamente ortogonale alla superficie in funzione della deformazione tagliante, il suo gradiente risulta essere:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{t}}_3^{t+\Delta t}}{\partial S_\beta} = \frac{\partial \Delta\mathbf{q}}{\partial S_\beta} \mathbf{t}_3^t \Delta\mathbf{q}^\dagger + \Delta\mathbf{q} \mathbf{t}_3^t \frac{\partial \Delta\mathbf{q}^\dagger}{\partial S_\beta} + \Delta\mathbf{q} \frac{\partial \mathbf{t}_3^t}{\partial S_\beta} \Delta\mathbf{q}^\dagger = \frac{\partial \Delta\mathbf{q}}{\partial S_\beta} \mathbf{t}_3^t \Delta\mathbf{q}^\dagger - \left[\frac{\partial \Delta\mathbf{q}}{\partial S_\beta} \mathbf{t}_3^t \Delta\mathbf{q}^\dagger \right]^\dagger + \Delta\mathbf{q} \frac{\partial \mathbf{t}_3^t}{\partial S_\beta} \Delta\mathbf{q}^\dagger$$

Si potrà quindi scrivere:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{t}}_3^{t+\Delta t}}{\partial S_\beta} = 2\mathbf{V} \left(\frac{\partial \Delta\mathbf{q}}{\partial S_\beta} \mathbf{t}_3^t \Delta\mathbf{q}^\dagger \right) + \Delta\mathbf{q} \frac{\partial \mathbf{t}_3^t}{\partial S_\beta} \Delta\mathbf{q}^\dagger$$

avendo definito i vettori di aggiornamento del gradiente incrementale:

$$\Delta\mathbf{R}_\beta = \mathbf{V} \left(2 \frac{\partial \Delta\mathbf{q}}{\partial S_\beta} \Delta\mathbf{q}^\dagger \right)$$

Andando ad indicare con l'apice † la coniugata della matrice.

Si otterrà quindi da passaggi matematici la relazione con il gradiente $B_{\alpha\beta}$ della normale aggiornata:

$$b_{\alpha\beta}^{t+\Delta t} = B_{\alpha\beta} \bar{h}_{\gamma\beta} = \mathbf{t}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{t}_3}{\partial s_\beta}$$

avendo introdotto:

$$\Delta \mathbf{r}_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \Delta \mathbf{R}_\beta \bar{h}_{\gamma\beta} = \frac{\sin \Delta \phi}{\Delta \phi} \frac{\partial \Delta \phi}{\partial s_\beta} + \frac{1 - \cos \Delta \phi}{\Delta \phi} \mathbf{p} \times \frac{\partial \Delta \phi}{\partial s_\beta} + \left(1 - \frac{\sin \Delta \phi}{\Delta \phi} \right) \mathbf{p} \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \Delta \phi}{\partial s_\beta}$$

Si avrà infine l'equazione di aggiornamento per il calcolo della curvatura della superficie aggiornata:

$$b_{\alpha\beta}^{t+\Delta t} = \varepsilon_\alpha^\gamma \mathbf{t}_\gamma^{t+\Delta t} \cdot \Delta \mathbf{r}_\beta + b_{\alpha\beta}^t \Delta \bar{h}_{\gamma\beta}$$

Incremento di deformazione di membrana

Siano $\bar{f}_{\alpha\beta}^t$ e $\bar{f}_{\alpha\beta}^{t+\Delta t}$ il gradiente di deformazione all'inizio e alla fine dell'incremento. Per definizione:

$$\bar{f}_{\alpha\beta}^{t+\Delta t} = \Delta \bar{f}_{\alpha\delta} \bar{f}_{\delta\beta}^t$$

Si avrà allora che il gradiente di deformazione incrementale risulta essere:

$$\Delta \bar{f}_{\alpha\beta} = \bar{f}_{\alpha\beta}^{t+\Delta t} \left(\bar{f}^{t-1} \right)_{\delta\beta}$$

Poiché $\Delta \bar{R}_{\gamma\beta}$ sono le componenti di una matrice ortogonale, il quadrato del tensore incrementale di stiramento *stretch tensor* si avrà da:

$$\Delta \bar{f}_{\alpha\gamma} \Delta \bar{f}_{\beta\gamma} = \Delta \bar{V}_{\alpha\gamma} \Delta \bar{V}_{\beta\gamma} = \sum_{I=1}^2 (\Delta \lambda_I)^2 \alpha_\alpha^I \alpha_\beta^I$$

e quindi l'incremento di deformazione logaritmica:

$$\Delta \varepsilon_{\alpha\beta} = \sum_{I=1}^2 \ln(\Delta \lambda_I)^2 \alpha_{\alpha}^I \alpha_{\beta}^I$$

e dalla decomposizione polare si ha l'incremento di rotazione materiale medio:

$$\Delta \bar{R}_{\alpha\beta} = \sum_{I=1}^2 \frac{1}{\Delta \lambda_I} \alpha_{\alpha}^I \alpha_{\beta}^I \Delta \bar{f}_{\gamma\beta}$$

Incremento di curvatura

Dalla teoria delle lastre di Koiter-Sanders si definisce l'incremento di curvatura fisica, trascurando i termini di ordine superiore al primo:

$$\Delta \kappa_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha}^{\gamma} t_{\gamma}^{t+\Delta t} \cdot \Delta r_{\beta}$$

Da notare come non sia presente la curvatura al passo precedente nella formula, risulta quindi superfluo conoscere la curvatura iniziale e quindi si può semplificare la formulazione del gradiente di deformazione:

$$F_{\alpha\beta} = \bar{f}_{\alpha\beta} + S_3 \bar{f}_{33} b_{\alpha\gamma} \bar{f}_{\gamma\beta}$$

e l'incremento di deformazione materiale sullo spessore sarà:

$$\Delta \varepsilon_{\alpha\beta} = \Delta \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \bar{f}_{33}^{t+\Delta t} S_3 \Delta \kappa_{\alpha\beta}$$

Lavoro virtuale

Il contributo al lavoro virtuale da parte delle tensioni è:

$$\delta \Pi = \int_V \sigma_{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} dV \quad \text{con } V \text{ volume dell'elemento}$$

assumendo che le variazioni di deformazione possano essere espresse in termini di variazione di deformazione di membrana e curvatura e introducendo forze e momenti di membrana si otterrà:

$$N_{\alpha\beta} = \int_h \sigma_{\alpha\beta} \bar{f}_{33} dS_3 \quad \text{sforzi membranali}$$

$$M_{\alpha\beta} = \int_h \sigma_{\alpha\beta} \bar{f}_{33}^2 S_3 dS_3 \quad \text{momenti}$$

$$\delta\Pi = \int_A N_{\alpha\beta} \delta\epsilon_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta} \delta\kappa_{\alpha\beta} dA$$

Dove h risulta lo spessore dell'elemento e quindi lo spessore di integrazione e A l'area dell'elemento e quindi l'area di integrazione.

Rateo del lavoro virtuale

Scritto il lavoro virtuale in termini di volume di riferimento con $\tau_{\alpha\beta}$ tensore di tensione di Kirchhoff, $\tau_{\alpha\beta} = J \sigma_{\alpha\beta}$ con $\sigma_{\alpha\beta}$ tensore di tensione di Cauchy e J jacobiano del gradiente di deformazione \mathbf{F} :

$$\delta\Pi = \int_{V^0} \tau_{\alpha\beta} \delta\epsilon_{\alpha\beta} dV^0 = \int_{A^0} \int_h \tau_{\alpha\beta} \delta\epsilon_{\alpha\beta} dS_3 dA^0$$

Dove l'apice 0 va a indicare l'entità alla configurazione iniziale, allora il rateo risulterà:

$$d\delta\Pi = \int_{A^0} \int_h \left(d^\nabla \tau_{\alpha\beta} \delta\epsilon_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta} d^\nabla \delta\epsilon_{\alpha\beta} \right) dS_3 dA^0$$

Con d^∇ ad indicare che il rateo è considerato nella configurazione materiale con sistema di coordinate corotazionale.

Assunta per equazione costitutiva:

$$d^\nabla \tau_{\alpha\beta} = J C_{\alpha\beta\gamma\delta} d\epsilon_{\delta\gamma} \quad \text{con } C \text{ tensore del quarto ordine}$$

si giungerà a:

$$d\delta\Pi = \int_A \left[\int_h \left(\bar{\delta\varepsilon}_{\alpha\beta} + \bar{f}_{33} S_3 \delta\kappa_{\alpha\beta} \right) C_{\alpha\beta\gamma\delta} \left(d\bar{\varepsilon}_{\gamma\delta} + \bar{f}_{33} S_3 d\kappa_{\gamma\delta} \right) \bar{f}_{33} dS_3 + N_{\alpha\beta} d^\nabla \bar{\delta\varepsilon}_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta} d^\nabla \delta\kappa_{\alpha\beta} \right] dA$$

Di cui vanno determinati $d^\nabla \bar{\delta\varepsilon}_{\alpha\beta}$ e $d^\nabla \delta\kappa_{\alpha\beta}$ che risultano da passaggi matematici:

$$d^\nabla \bar{\delta\varepsilon}_{\alpha\beta} = \text{sym} \left(\frac{\partial d\bar{\mathbf{x}}}{\partial s_\alpha} \cdot \frac{\partial d\bar{\mathbf{x}}}{\partial s_\beta} - 2d\bar{\varepsilon}_{\alpha\gamma} \bar{\delta\varepsilon}_{\gamma\beta} \right)$$

$$d^\nabla \delta\kappa_{\alpha\beta} = \bar{\delta\mathbf{x}}_{,a} \cdot d^\nabla \mathbf{t}_{3,b} + d\bar{\mathbf{x}}_{,a} \cdot \delta\mathbf{t}_{3,b} + \bar{\mathbf{x}}_{,a} \cdot (d^\nabla \delta\mathbf{t}_3)_{,b}$$

Gestione del taglio trasversale

Al fine di evitare il fenomeno di *shear-locking* si andrà in seguito a presentare il metodo implementato nel programma di calcolo basato sul principio di Hu-Washizu valido per elementi ad integrazione completa.

Considerando l'elemento isoparametrico in figura:

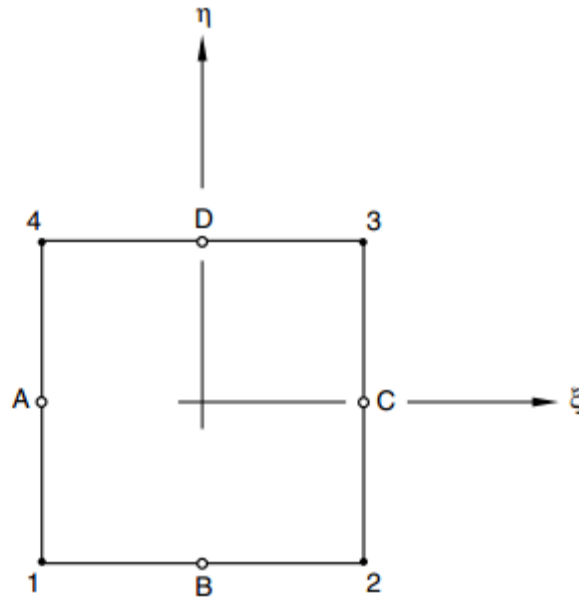


Figura 5-4 Notazione assunta per l'elemento isoparametrico standard

Il campo di tensioni taglienti sarà pertanto:

$$\bar{\gamma}_1 = \frac{1}{2} \left[(1-\eta) \gamma_1^B + (1+\eta) \gamma_1^D \right]$$

$$\bar{\gamma}_2 = \frac{1}{2} \left[(1-\xi) \gamma_2^A + (1+\xi) \gamma_2^C \right]$$

con:

$$\gamma_2^A = \mathbf{t}^A \cdot \bar{\mathbf{x}}_{,2}^A - \mathbf{T}^A \cdot \bar{\mathbf{X}}_{,2}^A$$

$$\gamma_2^C = \mathbf{t}^C \cdot \bar{\mathbf{x}}_{,2}^C - \mathbf{T}^C \cdot \bar{\mathbf{X}}_{,2}^C$$

$$\gamma_1^B = \mathbf{t}^B \cdot \bar{\mathbf{x}}_{,1}^B - \mathbf{T}^B \cdot \bar{\mathbf{X}}_{,1}^B$$

$$\gamma_1^D = \mathbf{t}^D \cdot \bar{\mathbf{x}}_{,1}^D - \mathbf{T}^D \cdot \bar{\mathbf{X}}_{,1}^D$$

deformazioni taglienti covarianti valutati in A, B, C, D posizionati come in figura, e con:

$$\bar{\mathbf{x}}_{,2}^A = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{x}}_4 - \bar{\mathbf{x}}_1)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{,1}^B = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{x}}_2 - \bar{\mathbf{x}}_1)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{,2}^C = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{x}}_3 - \bar{\mathbf{x}}_2)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{,1}^D = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{x}}_3 - \bar{\mathbf{x}}_4)$$

Come nel resto della trattazione le lettere minuscole indicano quantità prese nella configurazione deformata e lettere maiuscole in configurazione di riferimento.

Allora definiti i seguenti vettori:

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{Bmatrix} \bar{\gamma}_1 \\ \bar{\gamma}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\delta \bar{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \delta \bar{x}_1 \\ \delta \bar{x}_2 \\ \delta \bar{x}_3 \\ \delta \bar{x}_4 \end{Bmatrix}$$

$$\delta \bar{\boldsymbol{\phi}} = \begin{Bmatrix} \delta \bar{\phi}_1 \\ \delta \bar{\phi}_2 \\ \delta \bar{\phi}_3 \\ \delta \bar{\phi}_4 \end{Bmatrix}$$

La deformazione tagliante trasversale linearizzata sarà allora:

$$\delta \bar{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{Bmatrix} \bar{\gamma}_1 \\ \bar{\gamma}_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{sm} \delta \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_{sb} \delta \bar{\boldsymbol{\phi}}$$

Con rispettivamente:

$$\bar{\mathbf{B}}_{sm} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) \mathbf{t}^{B^T} & (1-\eta) \mathbf{t}^{B^T} & (1+\eta) \mathbf{t}^{D^T} & -(1+\eta) \mathbf{t}^{D^T} \\ -(1-\xi) \mathbf{t}^{A^T} & -(1+\xi) \mathbf{t}^{C^T} & (1+\xi) \mathbf{t}^{C^T} & (1-\xi) \mathbf{t}^{A^T} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{sb} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-\eta) \boldsymbol{\eta}_1^{B^T} & (1-\eta) \boldsymbol{\eta}_1^{B^T} & (1+\eta) \boldsymbol{\eta}_1^{D^T} & (1+\eta) \boldsymbol{\eta}_1^{D^T} \\ (1-\xi) \boldsymbol{\eta}_2^{A^T} & (1+\xi) \boldsymbol{\eta}_2^{C^T} & (1+\xi) \boldsymbol{\eta}_2^{C^T} & (1-\xi) \boldsymbol{\eta}_2^{A^T} \end{bmatrix}$$

Nel caso di formulazione di lastra di Kirchhoff si avrà:

$$\begin{Bmatrix} Q^1 \\ Q^2 \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_s \begin{Bmatrix} \bar{\gamma}_1 \\ \bar{\gamma}_2 \end{Bmatrix}$$

con matrice di rigidità a taglio:

$$\mathbf{C}_s = \frac{5}{6} G_s h \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{bmatrix}$$

dove la matrice di componenti $A^{\alpha\beta}$ è l'inversa della metrica di componenti $A_{\alpha\beta}$, con le componenti in configurazione di riferimento date da:

$$A_{\alpha\beta} = \bar{\mathbf{X}}_{,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{X}}_{,\beta}$$

Le componenti dello sforzo tagliante vero sono date dalla trasformazione di coordinate:

$$q = \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{Bmatrix} = \frac{A}{a} \begin{bmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q^1 \\ Q^2 \end{Bmatrix}$$

con A area dell'elemento in configurazione di riferimento, a area dell'elemento in configurazione deformata.

La rigidezza iniziale sarà scritta come:

$$\mathbf{q} \cdot d\delta\bar{\gamma} = \int \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_s \cdot \Delta\mathbf{u} da$$

con:

$$\delta\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \delta\bar{x}_1 \\ \delta\phi_1 \\ \delta\bar{\mathbf{x}}_2 \\ \delta\phi_2 \\ \delta\bar{\mathbf{x}}_3 \\ \delta\phi_3 \\ \delta\bar{\mathbf{x}}_4 \\ \delta\phi_4 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{du} = \begin{Bmatrix} d\bar{x}_1 \\ d\phi_1 \\ d\bar{\mathbf{x}}_2 \\ d\phi_2 \\ d\bar{\mathbf{x}}_3 \\ d\phi_3 \\ d\bar{\mathbf{x}}_4 \\ d\phi_4 \end{Bmatrix}$$

e \mathbf{K}_s contributo al taglio trasversale iniziale:

$$\mathbf{K}_s = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & \hat{\mathbf{a}} + \mathbf{b} & 0 & \mathbf{b} & 0 & 0 & 0 & \hat{\mathbf{a}} \\ -\mathbf{a} - \mathbf{b} & \mathbf{A} + \mathbf{B} & \mathbf{b} & \mathbf{B} & 0 & 0 & \hat{\mathbf{a}} & \mathbf{A} \\ 0 & -\mathbf{b} & 0 & -\mathbf{b} + \hat{\mathbf{c}} & 0 & \hat{\mathbf{c}} & 0 & 0 \\ -\mathbf{b} & \mathbf{B} & \mathbf{b} - \hat{\mathbf{c}} & \mathbf{B} + \mathbf{C} & \hat{\mathbf{c}} & \mathbf{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\hat{\mathbf{c}} & 0 & -\hat{\mathbf{c}} - \mathbf{d} & 0 & -\mathbf{d} \\ 0 & 0 & -\hat{\mathbf{c}} & \mathbf{C} & \hat{\mathbf{c}} + \mathbf{d} & \mathbf{C} + \mathbf{D} & -\mathbf{d} & \mathbf{D} \\ 0 & -\hat{\mathbf{a}} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{d} & 0 & \mathbf{d} - \hat{\mathbf{a}} \\ -\hat{\mathbf{a}} & \mathbf{A} & 0 & 0 & \mathbf{d} & \mathbf{D} & -\mathbf{d} + \hat{\mathbf{a}} & \mathbf{D} + \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

con:

$$\mathbf{A} = Q^2 (1 - \xi) \left[\text{sym} \left\{ \mathbf{t}^A \left(\bar{\mathbf{x}}_2^A \right)^T - \gamma_2^A \mathbf{I} \right\} \right], \quad \mathbf{B} = Q^1 (1 - \eta) \left[\text{sym} \left\{ \mathbf{t}^B \left(\bar{\mathbf{x}}_1^B \right)^T - \gamma_1^B \mathbf{I} \right\} \right]$$

$$\mathbf{C} = Q^2 (1 + \xi) \left[\text{sym} \left\{ \mathbf{t}^C \left(\bar{\mathbf{x}}_2^C \right)^T - \gamma_2^C \mathbf{I} \right\} \right], \quad \mathbf{D} = Q^1 (1 + \eta) \left[\text{sym} \left\{ \mathbf{t}^D \left(\bar{\mathbf{x}}_1^D \right)^T - \gamma_1^D \mathbf{I} \right\} \right]$$

$$\hat{\mathbf{a}} = Q^2 (1 - \xi) \hat{\mathbf{t}}^A, \quad \mathbf{b} = Q^1 (1 - \eta) \hat{\mathbf{t}}^B$$

$$\hat{\mathbf{c}} = Q^2 (1 + \xi) \hat{\mathbf{t}}^C, \quad \mathbf{d} = Q^1 (1 + \eta) \hat{\mathbf{t}}^D$$

Formulazione dell'elemento shell completamente integrato a deformazioni finite S4

Per la completa integrazione della rigidità dell'elemento non sono presenti modi puri di membrana e flessioni a energia nulla e non è quindi necessaria stabilizzazione dell'effetto hourglass membranale e flessionale.

Si necessita nella formulazione del controllo del drilling. La deformazione tagliante trasversale è assunta costante nell'elemento.

Risulta ben noto che la formulazione agli spostamenti usuale soffre di *shear locking* in problemi dominati da deformazione flessionale nel piano ma non per problemi con deformazione fuori dal piano dominante.

Ne consegue che la formulazione membranale dell'elemento S4 anziché essere quella tipica di uno *shell* è governata dalle equazioni di equilibrio per un continuo tridimensionale in stato di tensione piano.

Preso il tensore delle deformazioni \mathbf{D} e definito il tensore di deformazione migliorato $\bar{\mathbf{D}}$:

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + \tilde{\mathbf{D}}$$

Variazioni ammissibili nel rateo delle deformazioni definite:

$$\delta\bar{\mathbf{D}} = \delta\mathbf{D} + \delta\tilde{\mathbf{D}}$$

con:

$$\delta\mathbf{D} = \text{sym}\left(\frac{\partial\delta\mathbf{x}}{\partial\mathbf{x}}\right)$$

Si introduce il vincolo su $\tilde{\mathbf{D}}$ e \mathbf{D} :

$$\int_V (\bar{\mathbf{D}} - \mathbf{D}) : \boldsymbol{\sigma}^* dV = \int_V (\delta\bar{\mathbf{D}} - \delta\mathbf{D}) : \boldsymbol{\sigma}^* dV = 0$$

e pertanto il lavoro virtuale potrà essere scritto come:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{D}}) : \delta\bar{\mathbf{D}} dV + \int_V \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{x} dV - \int_{S_T} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{x} dS_T = 0$$

con \mathbf{t} tensione su S_T e $\delta\mathbf{x}=0$ su S_u . $\boldsymbol{\sigma}^*$ è uno stato di tensione arbitrario e la relazione costitutiva $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{D}})$ valida punto per punto.

In questa scrittura del lavoro virtuale $\bar{\mathbf{D}}$, \mathbf{D} , $\delta\bar{\mathbf{D}}$ e $\delta\mathbf{D}$ sono funzioni note di \mathbf{x} e $\delta\mathbf{x}$ e della configurazione di riferimento. Una fondamentale ipotesi di validità della formulazione è che il lavoro virtuale così scritto garantisca l'equilibrio.

Se σ^* è arbitrario, allora:

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \text{ e } \delta\bar{\mathbf{D}} = \delta\mathbf{D}$$

e sostituendo si ottiene:

$$\int_V \sigma : \delta\mathbf{D} dV + \int_V \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{x} dV - \int_{S_T} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{x} dS_T = 0$$

principio variazionale corrispondente alla scrittura del lavoro virtuale da cui ottenere l'equilibrio con il teorema della divergenza.

Nell'effettiva implementazione del metodo invece il vincolo è rispettato a tratti (*piecewise*) del campo tensionale σ^* costante, conseguentemente nel dominio si dovrà avere:

$$\int_{V^e} \tilde{\mathbf{D}} dV^e = \int_{V^e} \delta\tilde{\mathbf{D}} dV^e = 0$$

Quindi $\tilde{\mathbf{D}}$ e $\delta\tilde{\mathbf{D}}$ sono scelti al fine di eliminare il fenomeno di *shear locking* per flessione nel piano e il campo deformativo è modificato per approssimare le deformazioni causate dall'effetto di Poisson a flessione.

5.2 METODO DI ANALISI SCELTO

L'obiettivo della scelta è stato quello di poter rappresentare una prova di carico quasi statica in modo fedele.

Le alternative a disposizione erano analisi dinamiche implicite o esplicite, avendo l'accortezza di imporre spostamenti sufficientemente lenti da avere valori di

energia cinetica trascurabile rispetto alle altre energie in gioco, o in alternativa analisi statica implicita.

Al fine di condurre le analisi nel tempo minore possibile, garantendo comunque una soluzione adeguata, in base ai test eseguiti in preparazione al presente lavoro, si è scelto di eseguire le analisi come statiche con solutore implicito.

Il metodo implicito scelto è stato quello di Newton-Raphson classico, in quanto garantiva una miglior capacità di convergenza all'insorgere dei fenomeni fortemente non lineari del modello.

5.3 MODELLAZIONE DEL MATERIALE

5.3.1 ELASTOPLASTICITÀ

La modellazione del materiale tiene conto del comportamento incrudente dell'acciaio, schematizzandolo come materiale elasto-plastico incrudente.

L'incrudimento scelto è quello cinematico perché più adatto a rappresentare le prove di carico ciclico come esposto nella trattazione al capitolo 1.

Per definire un materiale elasto-plastico con incrudimento cinematico in Abaqus è sufficiente riportare i valori di tensione, deformazione e modulo elastico relativi al caso di tensione monoassiale.

I valori impostati per le varie componenti del modello sono in seguito riportati in tabella. I valori di deformazione a snervamento e deformazione in corrispondenza della tensione ultima sono riportati per completezza anche se non sono dati di input in quanto Abaqus li ottiene a partire dalle altre grandezze.

	Anima trave	Flangia trave	Anima colonna	Flangia colonna
E [MPa]	206458	206418	206603	206469
ν	0.2875	0.2875	0.2875	0.2875
σ_y [MPa]	305.35	278.98	402.38	313.07
ε_y	14.79×10^{-4}	13.52×10^{-4}	19.48×10^{-4}	15.16×10^{-4}
σ_u [MPa]	506.02	498.50	558.37	530.58
ε_u	20.70×10^{-2}	22.31×10^{-2}	13.10×10^{-2}	19.89×10^{-2}
$\varepsilon_{u,pl}$	20.45×10^{-2}	22.07×10^{-2}	12.83×10^{-2}	19.63×10^{-2}

Tabella 5-1 Proprietà dei materiali nel modello numerico

I valori sono quelli di tensione in MPa e deformazione. Le tensioni sono tensioni di Cauchy $\sigma_{tr} = \frac{F}{A}$ e deformazione logaritmica $\varepsilon_{tr} = \frac{\Delta l}{l}$ ottenuti in funzione dei valori di *engineering stress* e *engineering strain* delle prove di trazione monoassiale. La relazione per passare da una grandezza all'altra è :

$$\varepsilon_{tr} = \ln(1 + \varepsilon_{eng})$$

$$\sigma_{tr} = \sigma_{eng} (1 + \varepsilon_{eng})$$

5.3.2 MODELLO DI DANNO

La legge di danno scelta vuole essere di semplice utilizzo e comprensione, in accordo con la semplicità del modello elasto-plastico scelto. Si è pertanto optato per un criterio energetico ad andamento lineare.

Si è posto l'inizio del comportamento danneggiato in corrispondenza alla deformazione plastica $\varepsilon_{u,pl}$ corrispondente alla tensione ultima σ_u . Questo criterio

è di semplice realizzazione nel modello e rappresenta in modo corretto il comportamento dell'acciaio soggetto a prova di carico monoassiale [11].

Al fine di ridurre la dipendenza da mesh della formulazione della legge di evoluzione del danno si segue un approccio tensione-spostamento anziché il classico tensione-deformazione. Si definirà pertanto la lunghezza caratteristica L associata ad un punto di integrazione. L'energia di frattura per unità d'area sarà quindi:

$$G_f = \int_{\varepsilon_0^{pl}}^{\varepsilon_f^{pl}} L \sigma_y d\varepsilon^{pl} = \int_0^{u_f^{pl}} \sigma_y du^{pl}$$

Andando a indicare con ε_0^{pl} la deformazione di inizio danneggiamento –nel nostro caso pari a $\varepsilon_{u,pl}$ – e con ε_f^{pl} e u_f^{pl} rispettivamente la deformazione e lo spostamento alla fine del processo di danneggiamento.

La definizione di L dipende dalla geometria e dalla formulazione dell'elemento. Nel caso presentato in questo lavoro è pari alla lunghezza del lato degli elementi quadrati più raffinati usati per discretizzare la zona prossima al nodo trave-pilastro.

Specificata in input la costante del materiale G_f e selezionata l'evoluzione lineare del danno si avrà che il rateo della variabile di danno segue la legge:

$$\dot{d} = \frac{L \dot{\varepsilon}^{pl}}{u_f^{pl}} = \frac{\dot{u}^{pl}}{u_f^{pl}}$$

Con lo spostamento a rottura ottenuto con:

$$u_f^{pl} = \frac{2G_f}{\sigma_{y0}}$$

Con σ_{y0} tensione di snervamento all'inizio del fenomeno di danneggiamento e pertanto nel nostro caso:

$$u_f^{pl} = \frac{2G_f}{\sigma_u}$$

In ultimo è stato definito il valore massimo della variabile di danno. In Abaqus questo valore va inserito nell'apposita casella del menu elemento utilizzato in fase di creazione della *mesh*.

In seguito una tabella riassuntiva con i parametri di danno scelti per il materiale e per gli elementi. In assenza di valori dell'energia specifica G_f reperibili in letteratura si sono svolte più soluzioni al fine di andare ad individuare dei valori ragionevoli per questo parametro. Nel presente lavoro verranno presentati solo i valori ritenuti più corretti.

	$\varepsilon_0^{pl} = \varepsilon_{u,pl}$	G_f	d_{max}
Anima trave	20.45×10^{-2}	5000 e 4000	0.7
Flangia trave	22.07×10^{-2}	5000 e 4000	0.7
Anima colonna	12.83×10^{-2}	5000 e 4000	0.7
Flangia colonna	19.63×10^{-2}	5000 e 4000	0.7

Tabella 5-2 Riassunto parametri di danno utilizzati

Il comportamento del materiale sarà quindi descrivibile nel caso monoassiale soggetto a spostamento monotono crescente come al capitolo 2.227:

- comportamento elastico lineare fino allo snervamento (ε_y, σ_y);
- comportamento plastico a incrudimento cinematico dallo snervamento alla tensione ultima (ε_u, σ_u);
- comportamento lineare nel tratto danneggiato fino a (ε_R, σ_R).
- scarico con modulo elastico $(1-d)E$

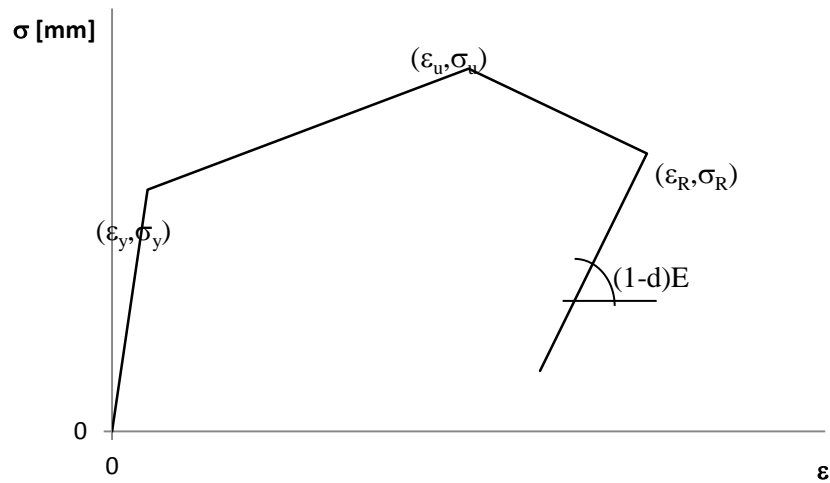


Grafico 5-1 Rappresentazione dell'andamento monoassiale del legame σ - ε con incrudimento e danno

5.4 CONDIZIONI AL CONTORNO

Le estremità della colonna sono state vincolate iperstaticamente ponendo nulli tutti gli spostamenti dei gradi di libertà attivi in accordo al vincolo realizzato nella realtà.

L'estremo libero della trave soggetto alla spinta dell'attuatore ha invece spostamento nella direzione del martinetto pari a quella della storia di carico, scelta di volta in volta, e spostamento trasversale nullo in accordo alla presenza della guida in sede sperimentale.

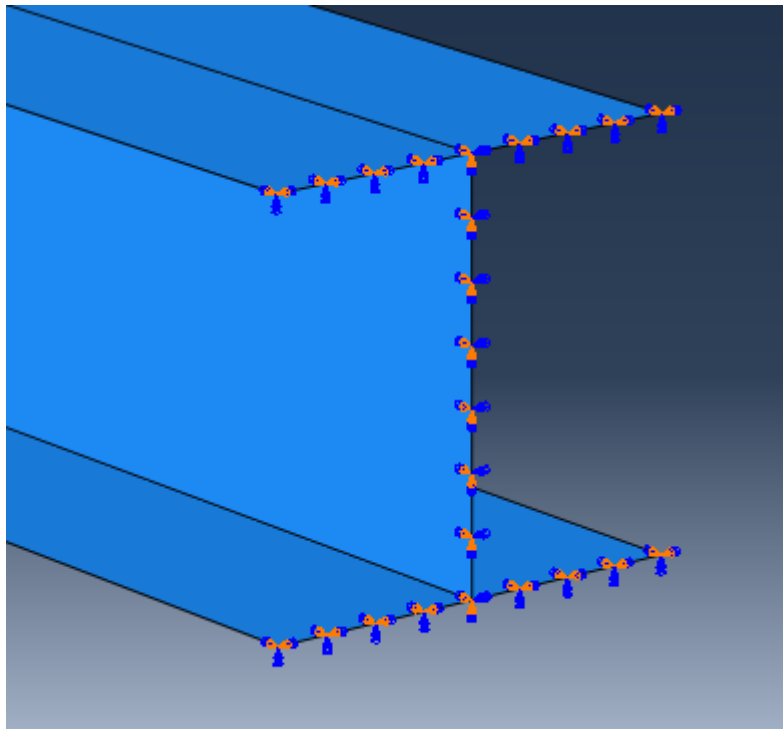


Figura 5-5 Condizioni al contorno vincolari, le frecce arancioni rappresentano il vincolo rotazionale, quelle blu il vincolo a traslazione

6. RISULTATI DELLE SIMULAZIONI

Nel presente capitolo verranno presentati e discussi i risultati delle simulazioni numeriche effettuate con i modelli realizzati secondo le specifiche del capitolo 5.

I risultati verranno presentati sotto forma di grafici forza-spostamento e energia-tempo.

I grafici forza spostamento verranno presentati al fine di valutare quanto il comportamento del modello realizzato si avvicini al comportamento del processo reale nell'aspetto più facilmente misurabile del fenomeno nella realtà.

I grafici energia tempo sono invece presentati per poter svolgere delle valutazioni sul comportamento ultimo del modello, nella fase di danneggiamento avanzato e diffuso precedente alla rottura. La rottura del modello porta infatti ad un repentino cambio di rigidità nel modello e questo può portare alla non convergenza del solutore utilizzato. Non potendosi però stabilire a priori se la non convergenza dell'iterazione del metodo di Newton-Raphson sia imputabile a rotture o altri fenomeni di origine numerica si è pensato di studiare il comportamento energetico del processo. Per quanto riguarda la legenda dei grafici energia – tempo verranno le seguenti diciture: AE *artificial strain energy* – energia artificiale, WK *work* – lavoro, PD *plastic dissipation* – dissipazione plastica, EE *elastic strain energy* – energia elastica, IE *internal energy* – energia interna.

6.1 BCC6-A

6.1.1 $G_f=5000, d_{MAX}=0.7$

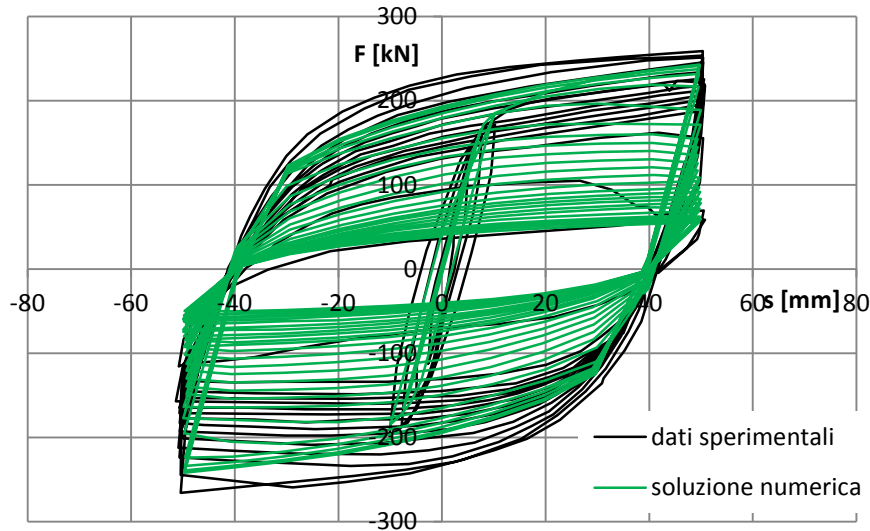


Grafico 6-1 Confronto comportamento reale e modello

La soluzione numerica ottenuta segue l'andamento sperimentale della curva forza spostamento con soddisfacente accuratezza. A partire dal ventiseiesimo ciclo si stabilizza asintoticamente sulla curva con minor ampiezza di carico senza ulteriore accumulo di danno. Nel caso sperimentale si raggiunge invece la rottura dopo 13 cicli. La diversità di comportamento è probabilmente imputabile all'assenza nel modello numerico di una funzione di danneggiamento in grado di rappresentare il reale comportamento della zona saldata termicamente alterata caratterizzata da una minor duttilità. Si è ritenuto di non dettagliare inutilmente il modello in quanto nei casi di interesse applicativo la progettazione corretta del collegamento deve evitare a priori concentrazioni di tensione e rotture nelle zone saldate.

Risultati delle simulazioni

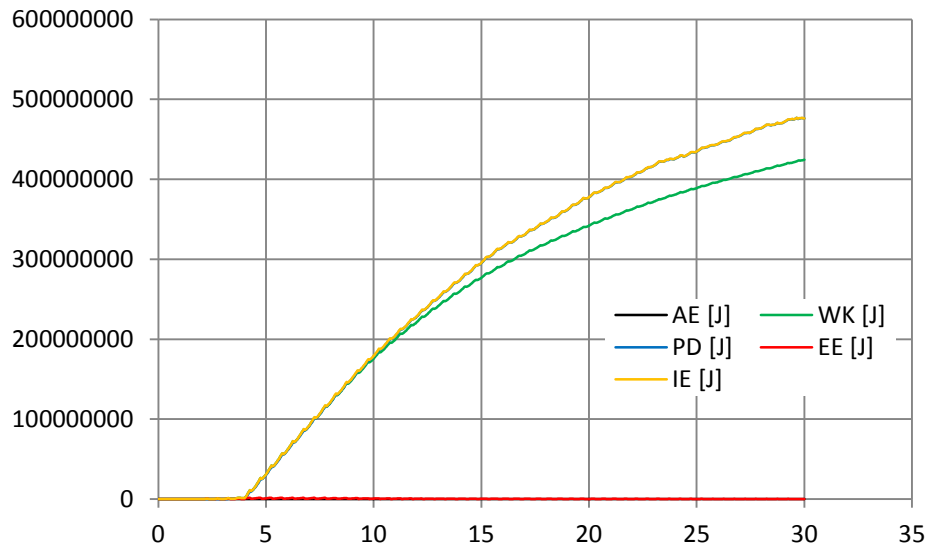


Grafico 6-2 Andamento delle energie in gioco nel tempo

L'energia totale del corpo è composta principalmente da energia di plasticizzazione e questo è in accordo al tipo di esperimento svolto in cui i provini sono spinti per molte volte in campo plastico.

6.1.2 $G_f=4000$, $d_{MAX}=0.7$

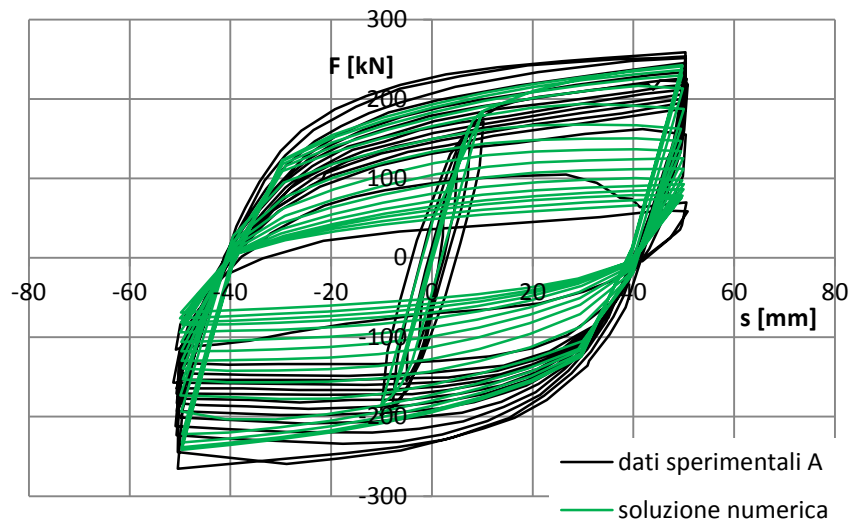


Grafico 6-3 Confronto comportamento reale e modello

I risultati numerici sono in discreto accordo con quelli sperimentali. Si può però notare come nel provino sperimentale la perdita di rigidità sia inizialmente graduale e abbastanza contenuta da un ciclo all'altro per poi risultare più brusca negli ultimi due cicli precedenti la rottura. Questo non avviene con il modello numerico e la perdita di rigidità risulta abbastanza stabile con l'evolversi del fenomeno.

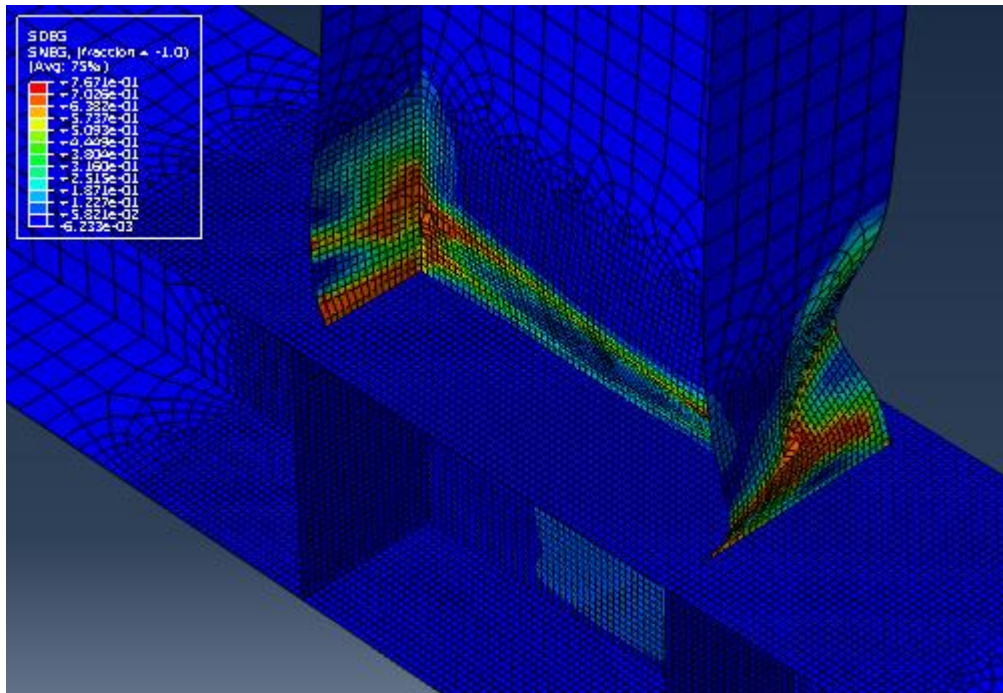


Figura 6-1 Localizzazione del danno per spostamento "A"

Risultati delle simulazioni

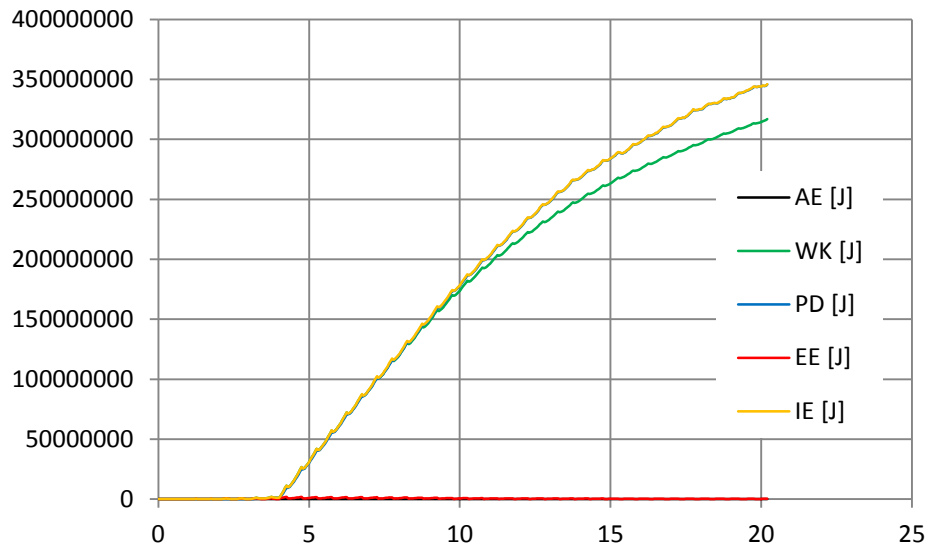


Grafico 6-4 Andamento delle energie in gioco nel tempo

L'andamento dell'energia rispecchia quanto riscontrato sia in fase sperimentale che nel comportamento del modello con l'aliquota principale dell'energia interna data dall'energia di deformazione plastica. I valori di *artificial strain energy* sono sufficientemente bassi non far sorgere dubbi sulla bontà della modellazione.

6.2 BCC6-B

6.2.1 $G_f=5000, d_{MAX}=0.7$

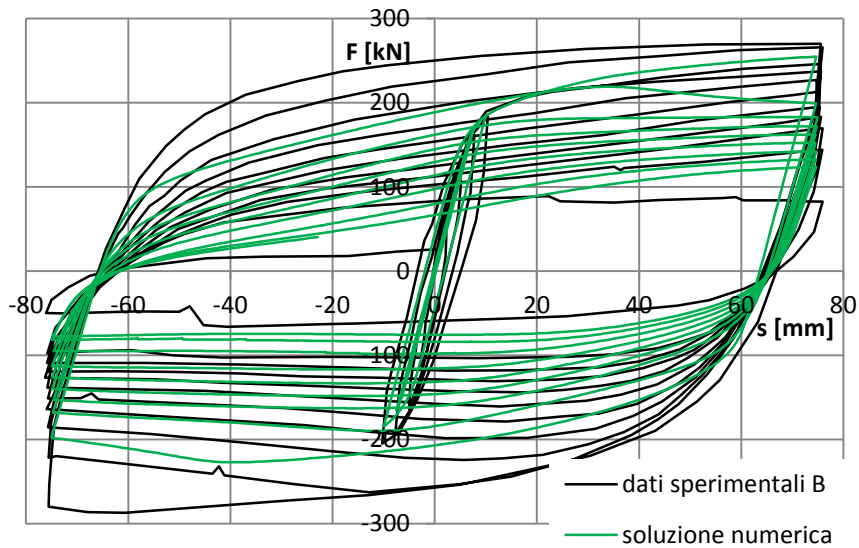


Grafico 6-5 Confronto comportamento reale e modello

Anche in questo caso si ha una buona approssimazione del modello numerico rispetto al caso reale. Il tratto incrudente risulta sensibilmente diverso in quanto più pendente se confrontato con i dati reali. La soluzione termina per non convergenza del solutore.

Risultati delle simulazioni

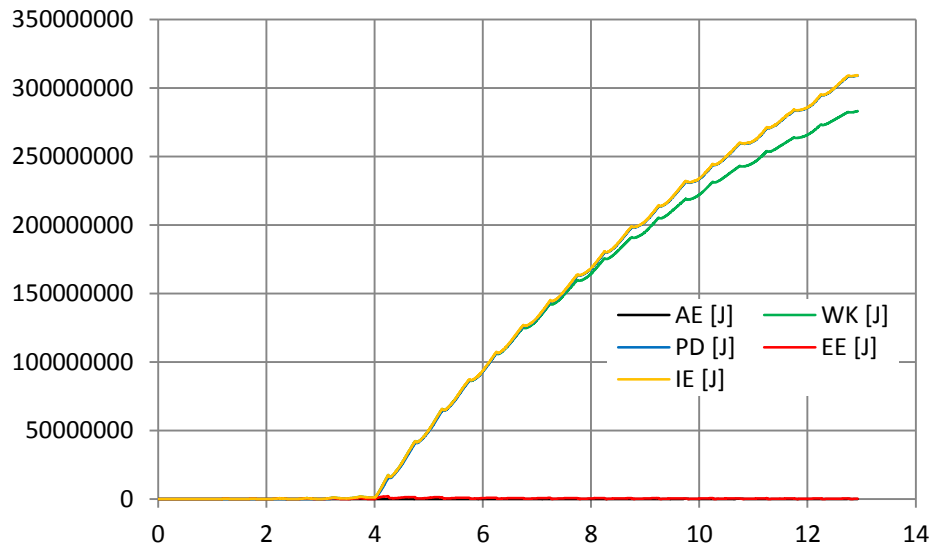


Grafico 6-6 Andamento delle energie in gioco nel tempo

Per quanto riguarda l'andamento energetico di questa prova vale quanto detto in precedenza per i risultati del caso con spostamento impresso "A" al 6.1.1.

6.2.2 $G_f=4000$, $d_{MAX}=0.7$

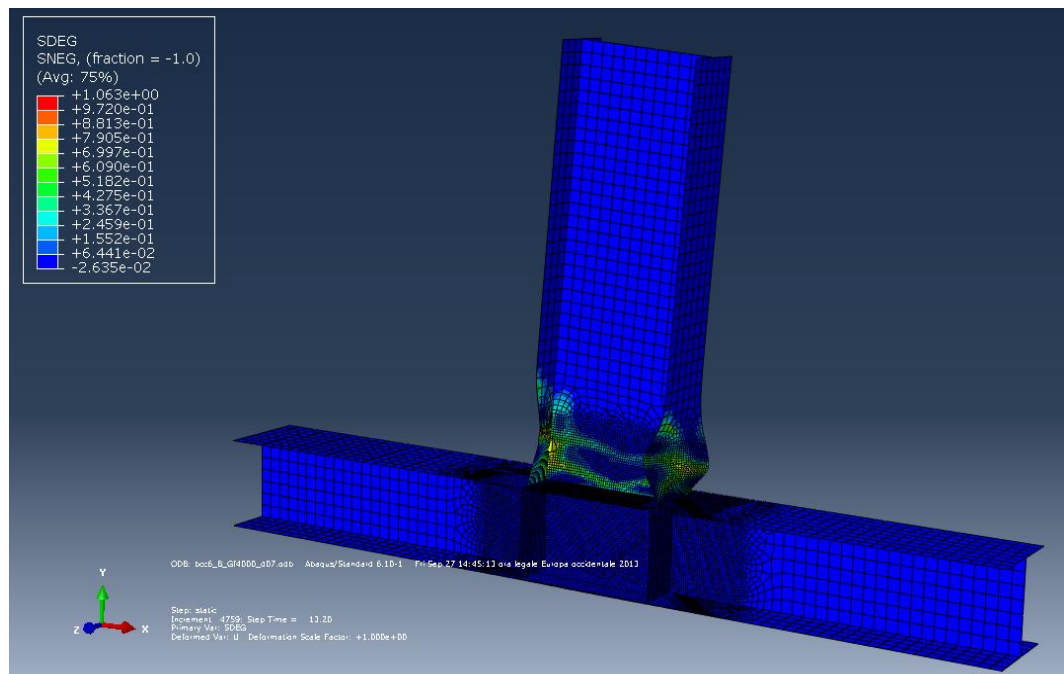


Figura 6-2 Localizzazione del danno nel modello agli elementi finiti

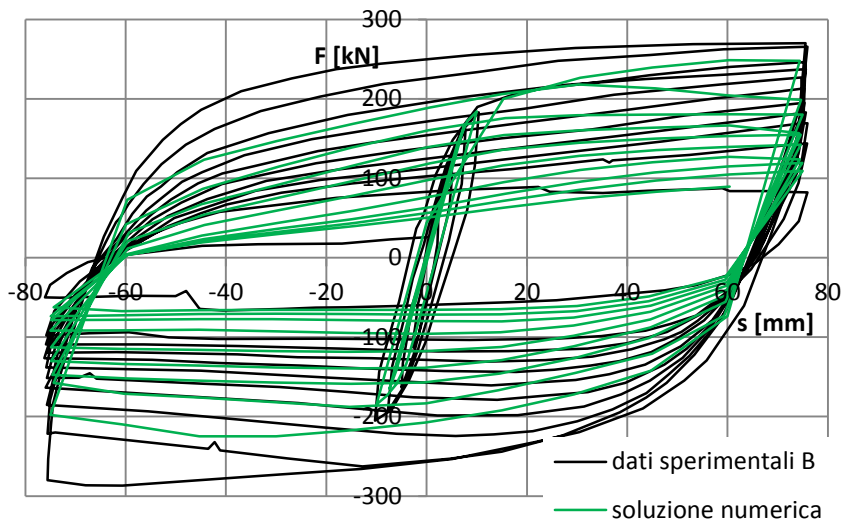


Figura 6-3 Confronto comportamento reale e modello

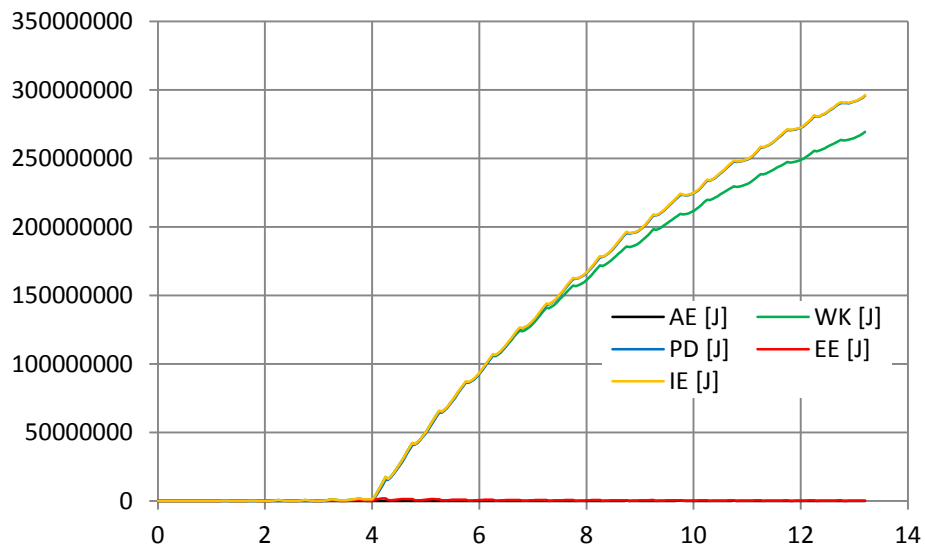


Figura 6-4 Andamento delle energie in gioco nel tempo

6.3 BCC6-BB

I risultati numerici per questa prova sono gli stessi che per la prova B trattata al 6.2. Vale la pena di far notare come i risultati sperimentali varino molto tra le prove “B” e “BB” e che quindi giudicare il modello attendibile non implichi avere una perfetta coincidenza tra risultati numerici e sperimentali ma che i risultati

numerici risultino sufficientemente prossimi. Verranno riportati solo i grafici forza spostamento al fine di illustrare l'adeguatezza del modello. Le considerazioni fatte in precedenza per il caso "B" valgono anche per quanto riguarda i grafici seguenti.

6.3.1 $G_f=5000, d_{MAX}=0.7$

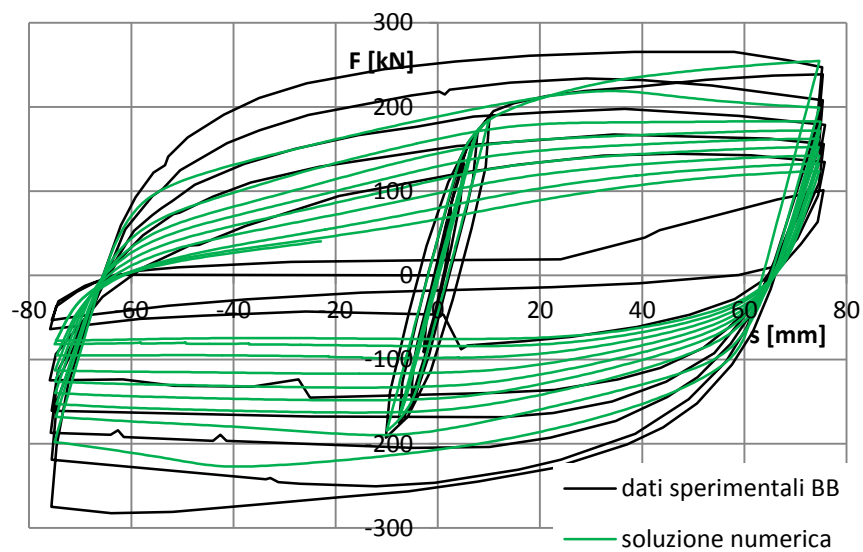


Grafico 6-7 Confronto comportamento reale e modello

6.3.2 $G_f=4000$, $d_{MAX}=0.7$

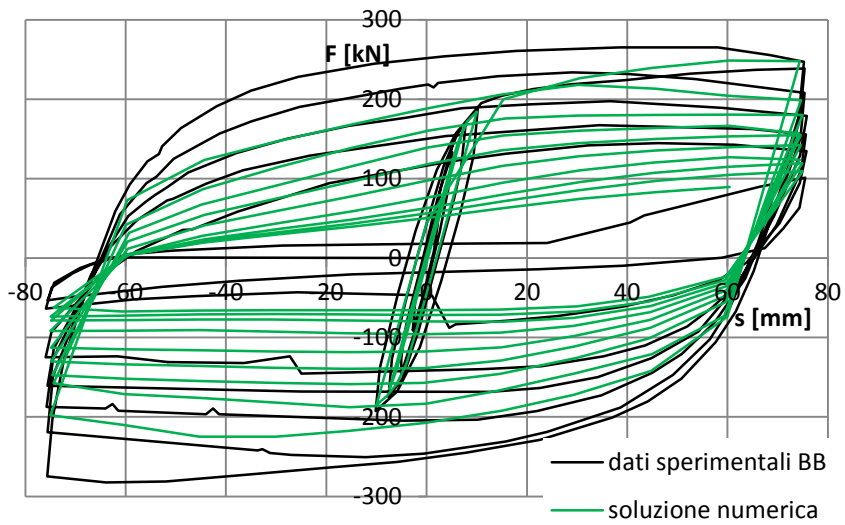


Figura 6-5 Confronto comportamento reale e modello

6.4 BCC6-C

6.4.1 $G_f=5000$, $d_{MAX}=0.7$

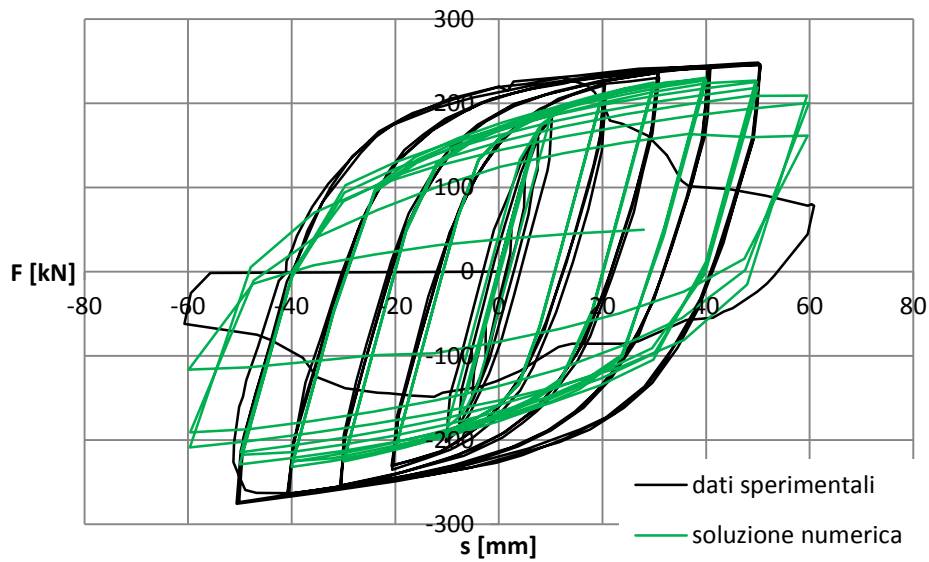


Grafico 6-8 Confronto comportamento reale e modello

L'andamento del percorso forza spostamento del modello risulta sufficientemente simile nei valori al comportamento registrato in fase sperimentale. Il modello perde gran parte della sua rigidezza al terzo ciclo di spostamento $\pm 60\text{mm}$ anziché all'inizio del primo ciclo e quindi la costante impostata di energia necessaria alla rottura si può dire essere leggermente superiore ad un valore ottimale. Il comportamento nei tre cicli a spostamento costante risulta conforme alla realtà sperimentale con un calo di rigidezza nel corso dei tre cicli a pari spostamento molto ridotto.

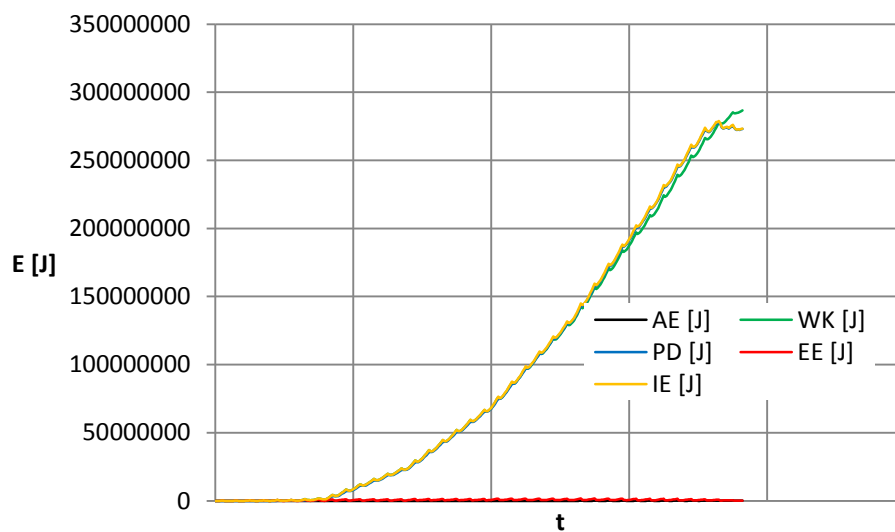


Grafico 6-9 Andamento delle energie in gioco nel tempo

Si nota come negli ultimi istanti di simulazione l'energia interna del corpo non sia più in aumento ma in diminuzione. Questo comportamento si reputa attribuibile al fenomeno di rottura del corpo. Per quanto riguarda l'andamento delle altre energie vale quanto detto altrove in questo capitolo.

6.4.2 $G_f=4000$, $d_{MAX}=0.7$

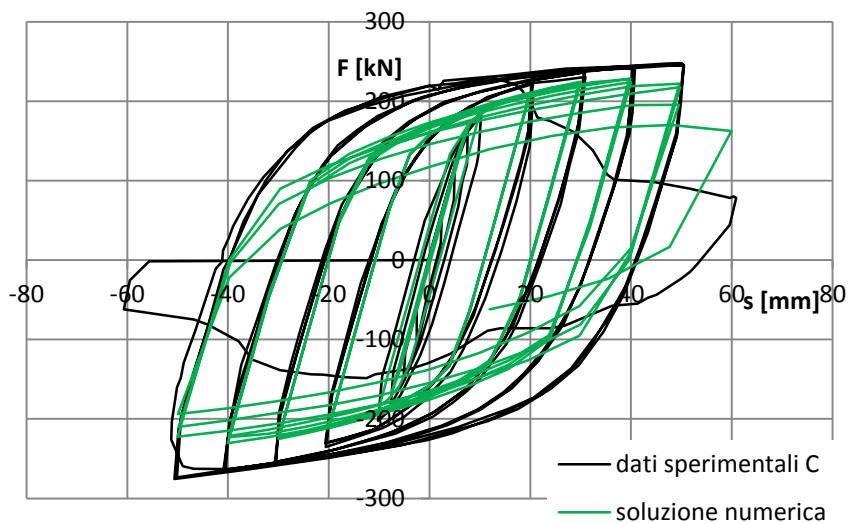


Grafico 6-10 Confronto comportamento reale e modello

L'andamento del percorso forza spostamento del modello risulta sufficientemente simile nei valori al comportamento registrato in fase sperimentale. Il modello perde gran parte della sua rigidità allo stesso ciclo sia nel modello che nei dati sperimentali. Il comportamento nei tre cicli a spostamento costante risulta conforme alla realtà sperimentale con un calo di rigidità nel corso dei tre cicli a pari spostamento molto ridotto.

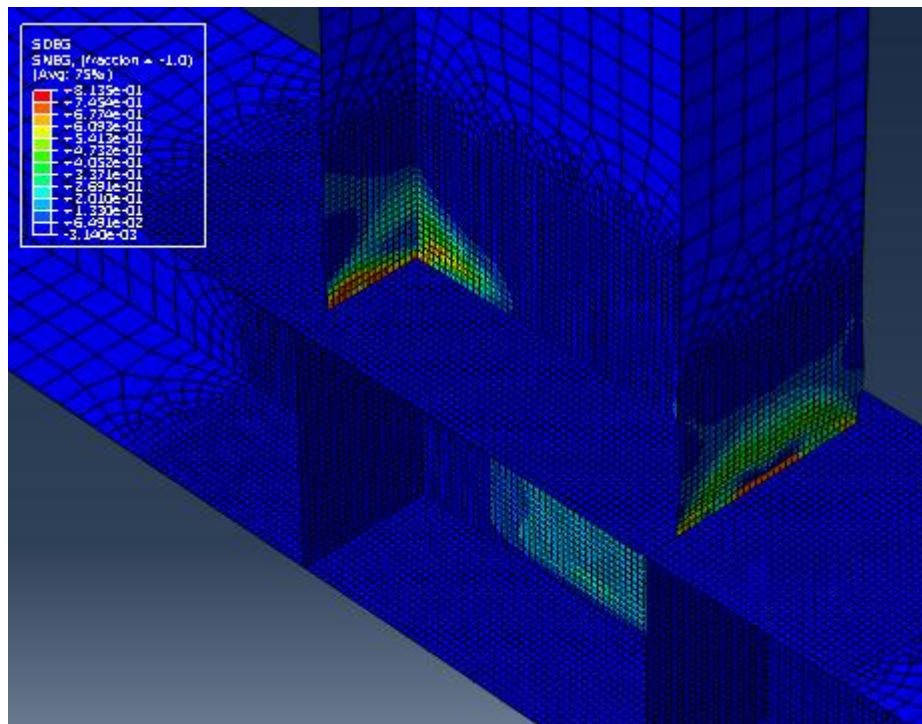


Figura 6-6 Localizzazione del danno per spostamento "C"

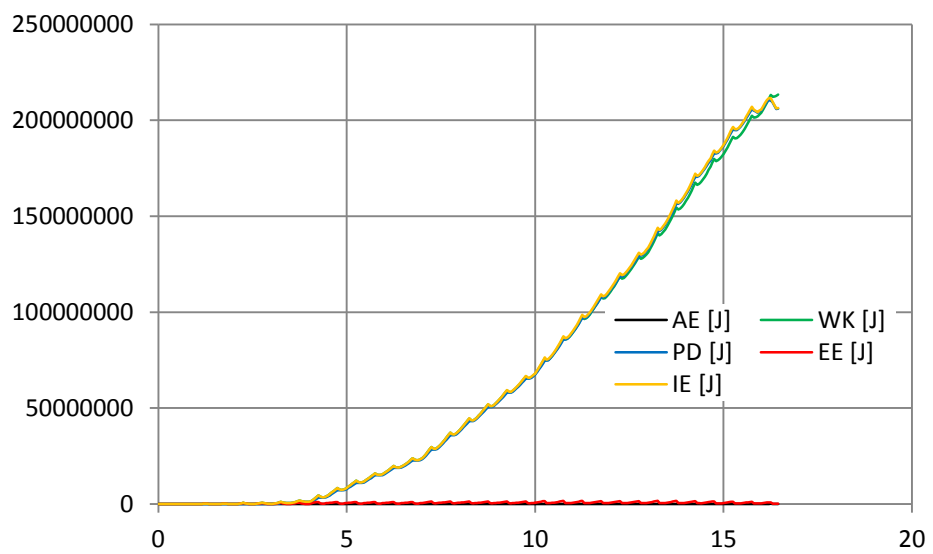


Grafico 6-11 Andamento delle energie in gioco nel tempo

6.5 BCC6-D

6.5.1 $G_f=5000, d_{MAX}=0.7$

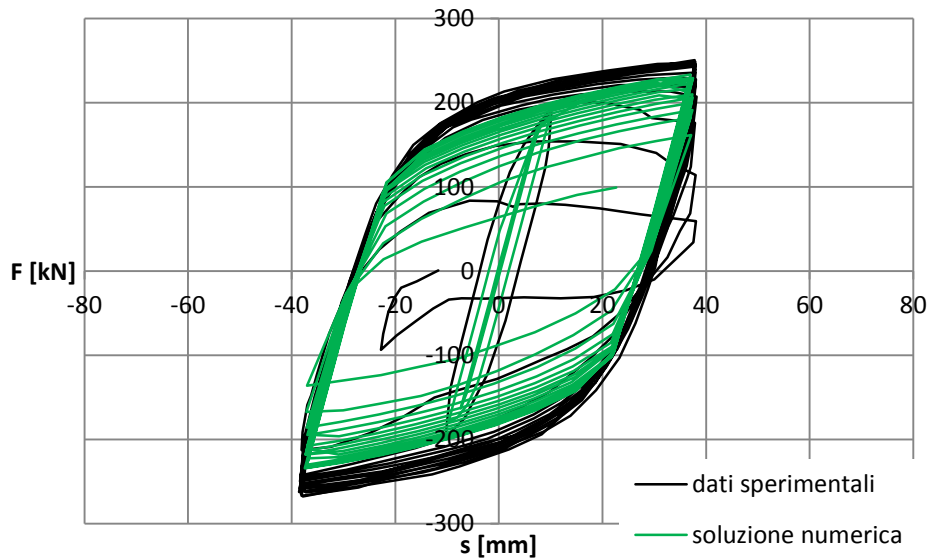


Grafico 6-12 Confronto comportamento reale e modello

La curva di carico forza spostamento risulta abbastanza aderente alla realtà sperimentale anche se la perdita di rigidezza risulta più graduale nel caso numerico e più brusca in quello sperimentale. La rottura avviene comunque in un numero di cicli paragonabile.

Risultati delle simulazioni

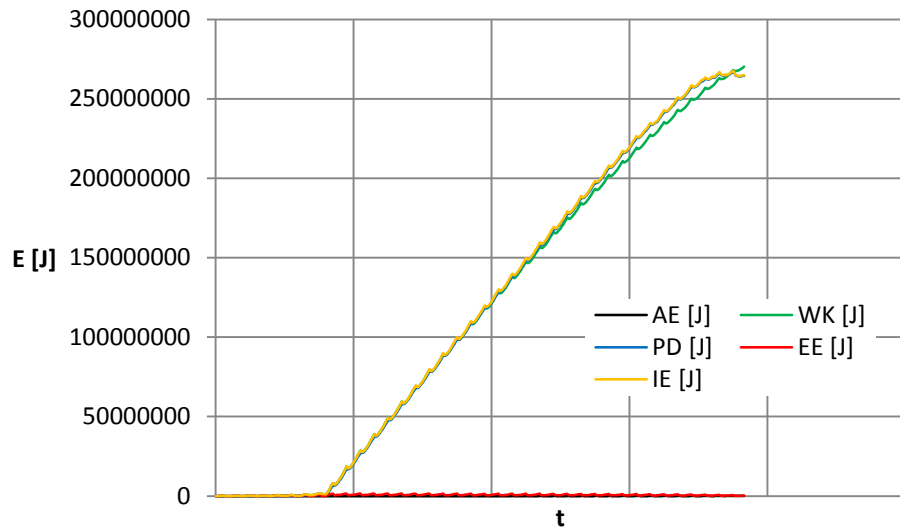


Grafico 6-13 Andamento delle energie in gioco nel tempo

L'energia in gioco come negli altri casi risulta essere composta per la maggior parte dalla componente plastica. Questo non deve sorprendere anche a fronte del minore valore di spostamento impresso in sommità in quanto comunque il valore di $\pm 37.5\text{mm}$ risulta di gran lunga superiore al limite di snervamento e il numero di cicli in cui si ha comportamento plastico risulta elevato. Il valore della *artificial strain energy* è sufficientemente limitato.

6.5.2 $G_f=4000$, $d_{MAX}=0.7$

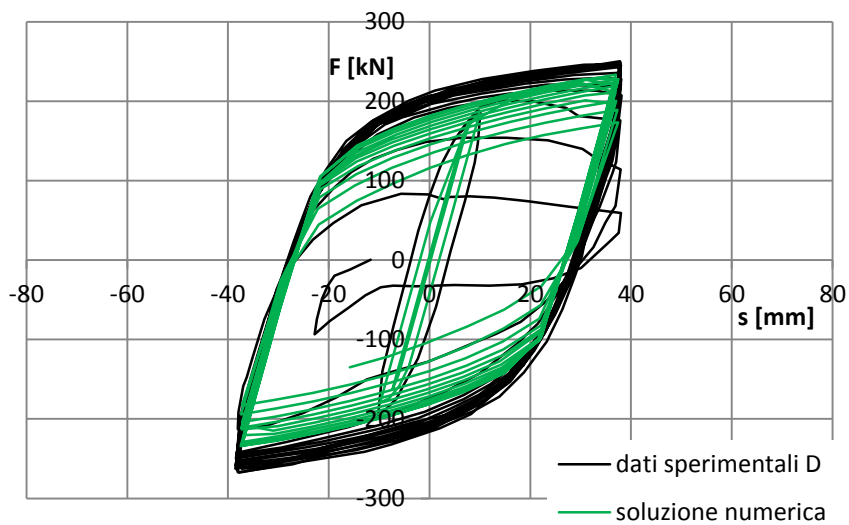


Grafico 6-14 Confronto comportamento reale e modello

Analogamente a quanto esposto per il caso precedente ma con una perdita ancora più progressiva di rigidezza nel caso numerico, anche in questo caso si ha un comportamento sensibilmente diverso rispetto al caso sperimentale.

Risultati delle simulazioni

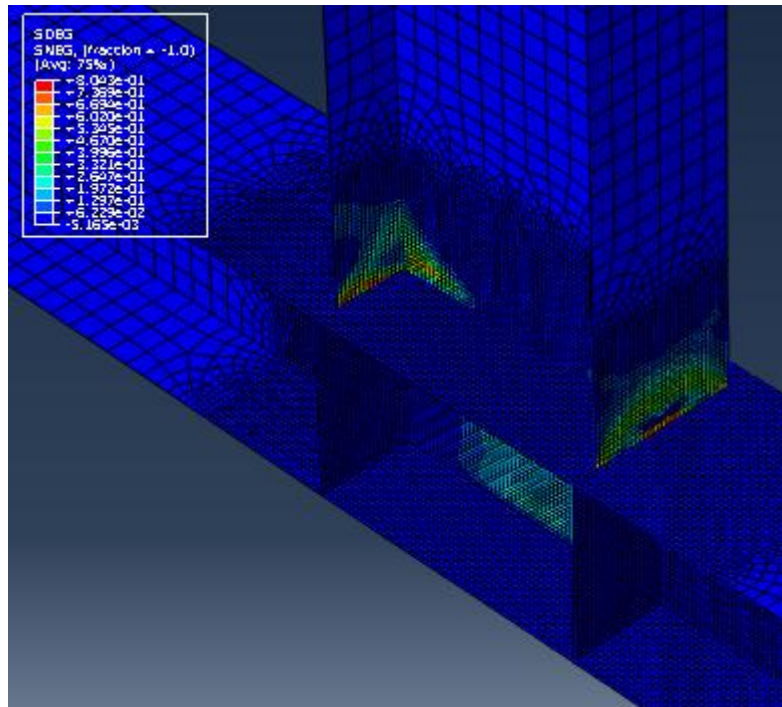


Figura 6-7 Localizzazione del danno per spostamento "D"

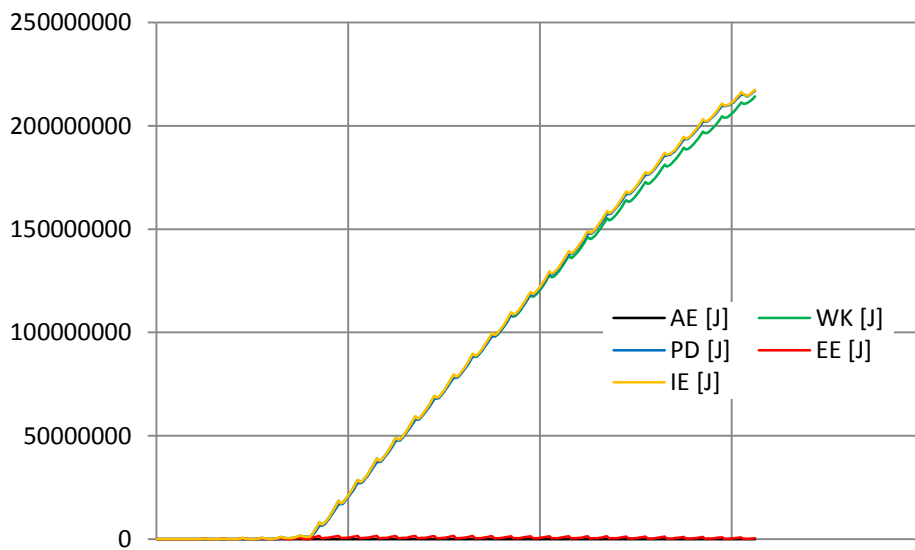


Grafico 6-15 Andamento delle energie in gioco nel tempo

Come riportato in precedenza anche qui l'energia interna del corpo è per lo più composta dall'energia di deformazione plastica e i valori di *artificial strain energy* risultano sufficientemente bassi.

6.6 BCC6-E

6.6.1 $G_f=5000$, $d_{MAX}=0.7$

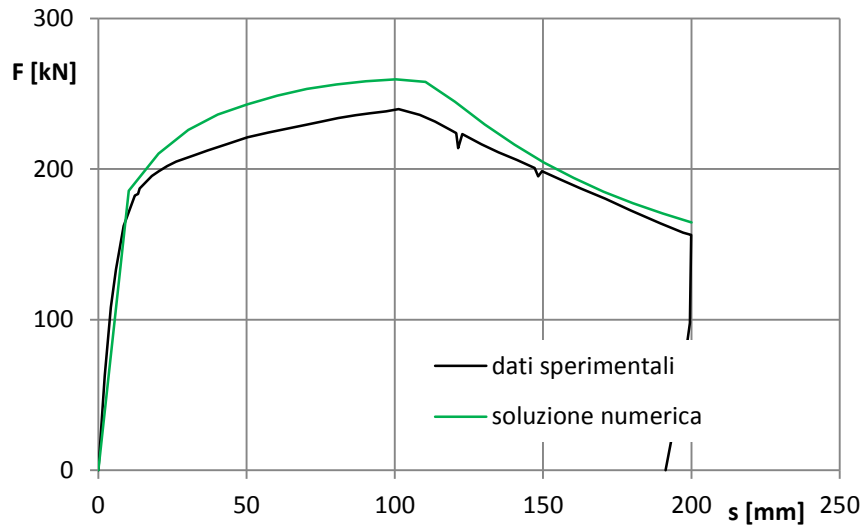


Grafico 6-16 Confronto comportamento reale e modello

Il comportamento ottenuto del modello approssima in modo molto soddisfacente la fase elastica registrata in sede sperimentale. Il comportamento in fase incrudente è a sua volta relativamente valido avendo un errore sulla forza a parità di spostamento che raggiunge al massimo valori attorno all'8.2%. Il successivo tratto rammollente si verifica a causa di fenomeni di instabilità locale concentrati su anima e flange della trave. Nel modello l'instaurarsi dell'instabilità si ha per spostamenti imposti in sommità molto prossimi a quelli riscontrati per via sperimentale e anche i valori di forza ottenuti risultano molto simili.

Risultati delle simulazioni

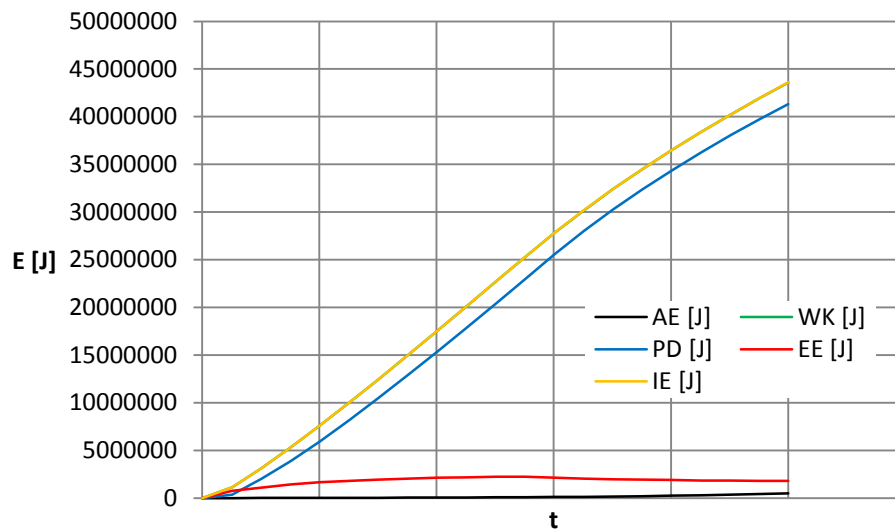


Grafico 6-17 Andamento delle energie in gioco nel tempo

La gran parte dell'energia interna durante il fenomeno è sotto forma di energia di deformazione plastica. Questo è in accordo con il comportamento della curva forza spostamento dove il comportamento puramente elastico lascia spazio al comportamento incrudente a circa 10mm di spostamento impresso in sommità. Si riscontra anche una diminuzione dell'energia elastica del corpo in corrispondenza dell'insorgere del fenomeno di instabilità. Questo è imputabile alla perdita di rigidità che si realizza. L'energia artificiale è sufficientemente bassa da non poter far sorgere dubbi sulla bontà della creazione del modello. Come precedentemente trattato al capitolo 3.2 infatti il computo di questa grandezza può solo servire da campanello d'allarme per un'eventuale scorretta modellazione.

6.6.2 $G_f=4000$, $d_{MAX}=0.7$

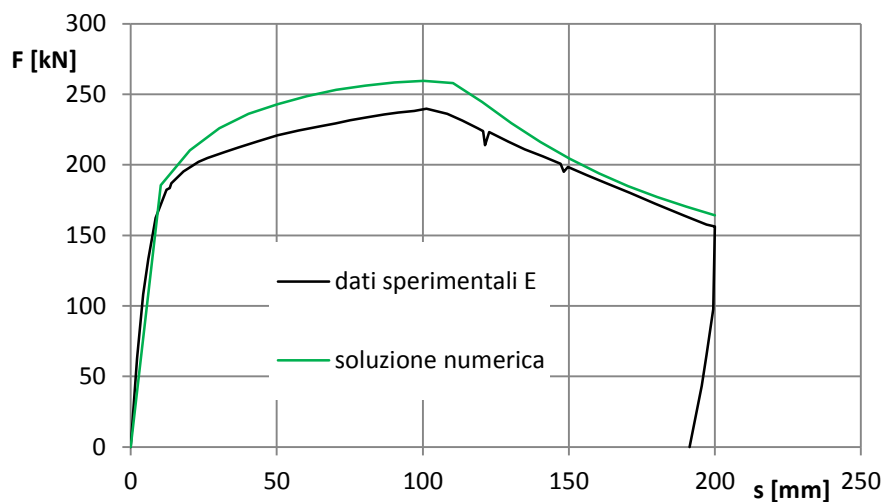


Grafico 6-18 Confronto comportamento reale e modello

Come già esposto in precedenza si può considerare la simulazione numerica soddisfacente nella rappresentazione del comportamento prima plastico, poi incrudente e infine rammollente per instabilità locale.

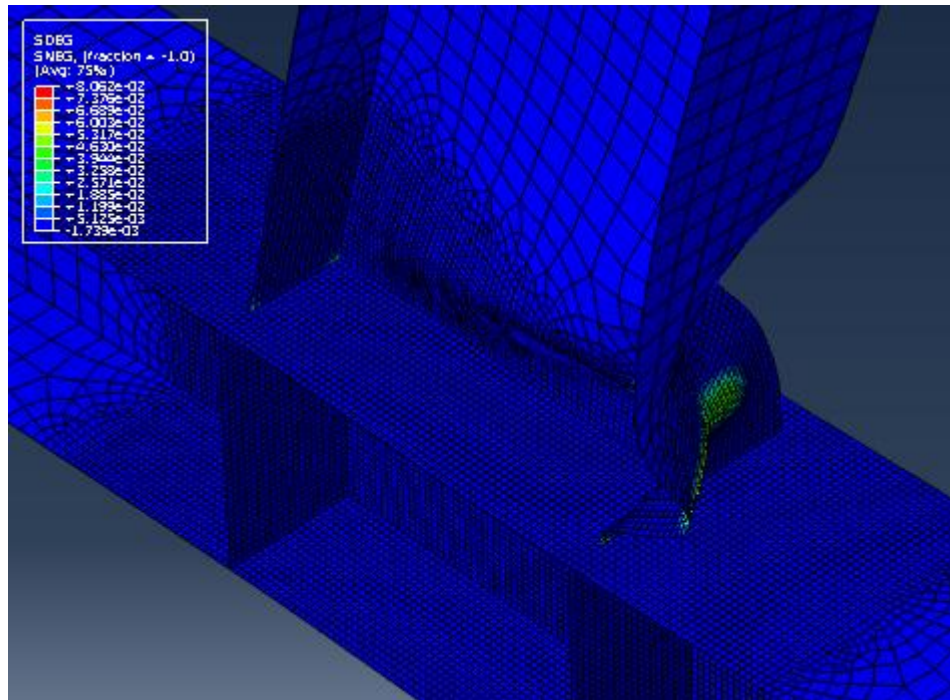


Figura 6-8 Localizzazione del danno per spostamento "E"

Si nota come i parametri di danno non incidano sul risultato. Questo è in accordo con i valori molto contenuti della variabile di danno che si raggiungono con questo tipo di storia di carico nel modello.

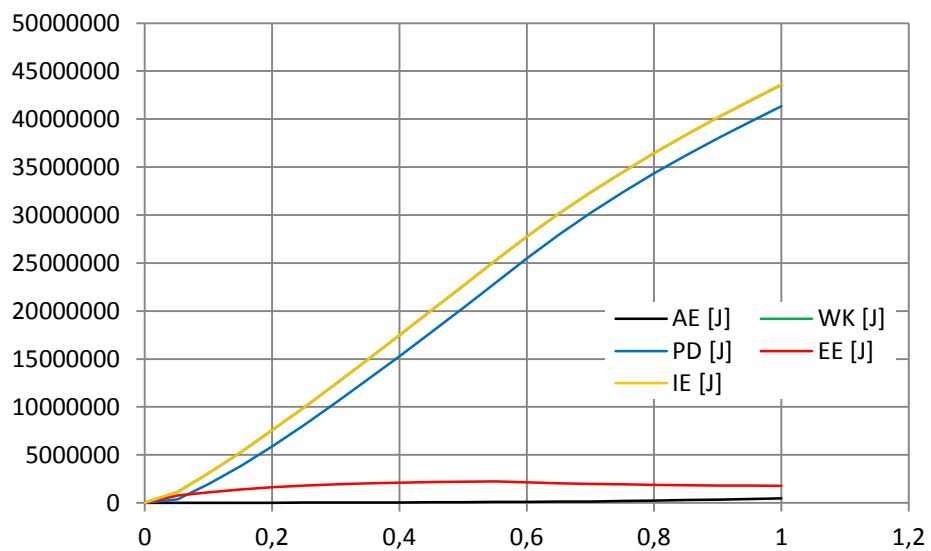


Grafico 6-19 Andamento delle energie in gioco nel tempo

Anche nel discutere i risultati in termini di energia è possibile giungere alle stesse conclusioni tratte in precedenza e il valore della *artificial strain energy* è sufficientemente basso per tutto il processo da non far sorgere dubbi sulla bontà della modellazione.

6.7 CONSIDERAZIONI

I risultati di tutte le simulazioni sono soddisfacenti e sufficientemente aderenti al fenomeno reale con un buon grado di approssimazione e dettaglio.

Questo è dichiarabile soprattutto in luce dei dati sperimentali delle prove a spostamento impresso denominate B e BB.

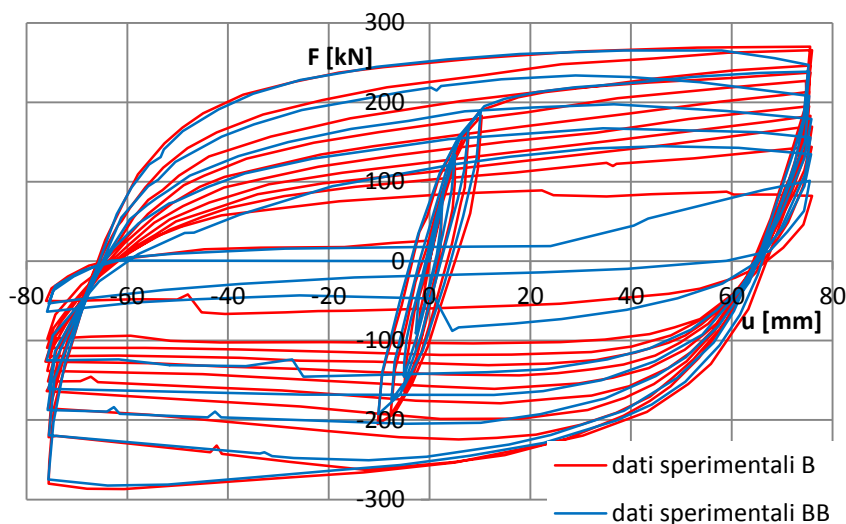


Grafico 6-20 Raffronto tra gli esiti sperimentali delle prove a spostamento "B" "BB"

Si è infatti potuta riscontrare una discreta variabilità dei dati sperimentali a parità di storia di spostamento utilizzata. Le due prove infatti, a spostamento massimo impresso $\pm 75\text{mm}$ hanno portato a rottura il provino con numeri di cicli nettamente diversi, 10 in un caso e 6 nell'altro. Questo permette di concludere che ottenere un risultato numerico accettabile non implica riuscire a ricalcare perfettamente l'andamento delle curve forza-spostamento registrate. Si può ritenere la simulazione numerica riuscita se il numero di cicli a rottura rientra in un intervallo

ragionevole attorno al valore riscontrato nella singola prova effettuata e se il comportamento al primo ciclo rispetta con buona approssimazione quello sperimentale.

In tutte le simulazioni il tratto incrudente successivo alla fase elastica risulta più ripido del caso reale ma porta a valori a spostamento massimo paragonabili. Questa diversità nel comportamento è meno accentuata per la storia di carico D, quella a spostamenti impressi più ridotti, dove l'andamento post-elastico della curva forza spostamento è molto simile nel caso numerico e in quello reale. Per le storie di spostamento impresso con spostamento massimo maggiore invece si verifica una notevole differenza nel comportamento in fase di ricarico. Il tratto elastico reale infatti procede più a lungo per poi in fase post-elastica assumere una pendenza ridotta. Nei risultati del modello invece il tratto elastico da spazio a quello plastico prima e quest'ultimo è caratterizzato da una pendenza maggiore rispetto al caso reale.

In tutte le simulazioni si può riscontrare un andamento dell'energia artificiale – *artificial strain energy* – sufficientemente limitato da poter ritenere di aver discretizzato la geometria del modello e gli incrementi di carico in modo soddisfacente. I valori risultano infatti ben al di sotto del 10% preso come soglia e quindi si può reputare la modellazione eseguita adeguatamente. In alcune simulazioni inoltre l'andamento dell'energia interna del corpo, nelle fasi finali del processo, non è più crescente ma decrescente e quindi si può dire con buona certezza che il corpo sia rotto e per questo si abbia la perdita di convergenza. Questa considerazione non è però estendibile a tutte le prove svolte dove la non convergenza del solutore non è accompagnata da modifiche dell'andamento delle energie in gioco.

Per quanto riguarda la simulazione del processo di carico del provino con storia di spostamento “D” si nota subito come il modello numerico risulti essere eccessivamente duttile, con un andamento della riduzione della rigidità del sistema ben più graduale che nel caso reale. Dai dati sperimentali infatti si nota

come al passare dei cicli la rigidità del sistema diminuisca poco per poi negli ultimi cicli scendere bruscamente.

Con il caso di carico “E”, a spostamento crescente, si nota come l'utilizzo di una legge di danno risulti superfluo. Le deformazioni plastiche in gioco sono infatti limitate dall'assenza di cicli di carico e l'energia in gioco è molto inferiore rispetto ai casi ciclici. Poiché il fenomeno di danno viene ad instaurarsi a partire da valori di deformazioni negli elementi relativamente elevate –*circa 0.2*– si ha che le zone in cui si verifica il fenomeno di danneggiamento risultano piuttosto limitate. Il basso valore delle energie in gioco rispetto ad altre storie di carico invece implica che, essendo il criterio utilizzato energetico, i valori della variabile di danno d risultano molto bassi. Tutto questo porta a concludere che per spostamenti monotoni l'utilizzo di una legge di danno risulta superfluo ai fini del risultato, nonché deleterio per quanto riguarda il costo computazionale dell'analisi.

7. INFLUENZA DEI DIFETTI INIZIALI

In questo capitolo verranno esposte le analisi svolte al fine di indagare l'incidenza di difetti iniziali sul provino quali saldature o imperfezioni geometriche sia nelle prove cicliche che in quelle a carico crescente monotono.

7.1 INFLUENZA DEL PROCESSO DI SALDATURA

Si è cercato di indagare l'influenza delle tensioni residue causate dal processo di saldatura. A causa del ciclo termico cui è sottoposto il nodo nelle zone saldate, che porta il metallo dalla temperatura ambiente a quella di fusione e poi rapidamente di nuovo alla temperatura iniziale, infatti vanno a generarsi delle tensioni che risulteranno permanenti al termine del raffreddamento.

Durante il riscaldamento del materiale si ha un aumento di volume e un cambiamento di forma causato dal gradiente termico. Al termine del riscaldamento, a saldatura completata, i vincoli della struttura e la presenza di altre parti del corpo non interessate dal processo termico, si genereranno delle coazioni che portano al nascere di tensioni nella zona in prossimità alla giunzione elevate e spesso prossime o pari al valore di snervamento dell'acciaio. Si avrà tensione di trazione sul cordone di saldatura e di compressione a poca distanza da questo. Le tensioni sono auto equilibrate in quanto non indotte da carico esterno.

Per generare questo stato coattivo nel modello numerico si è scelto di presollecitare la struttura nella zona di giunzione tra trave e pilastro con una temperatura di -200°C. La struttura è vincolata esternamente isostaticamente.

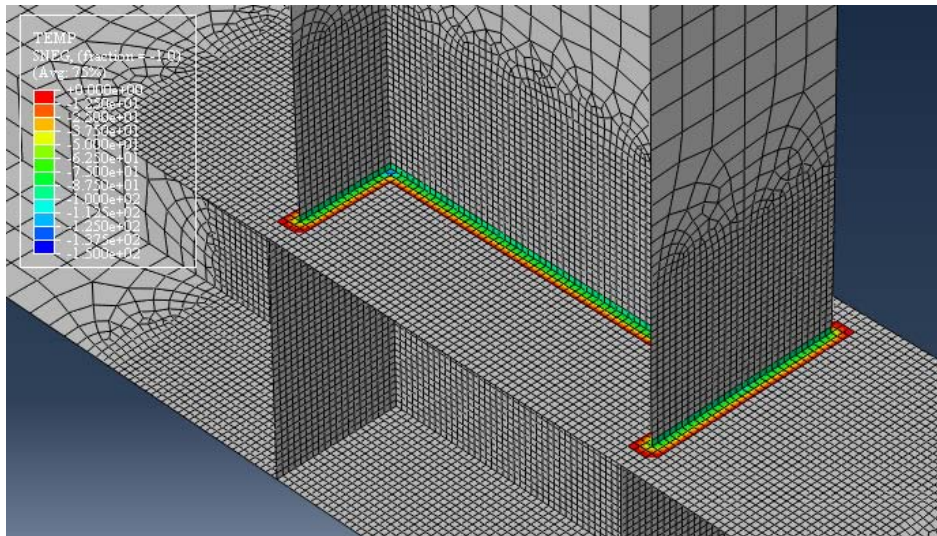


Figura 7-1 Andamento della temperatura applicata

Questo in quanto la saldatura viene eseguita prima del collegamento del provino all'apparato di prova. Con il set di vincoli di prova si sarebbe ottenuta una soluzione completamente diversa. Nella figura successiva sarà mostrato il *contour* tensionale generato dal carico termico applicato.

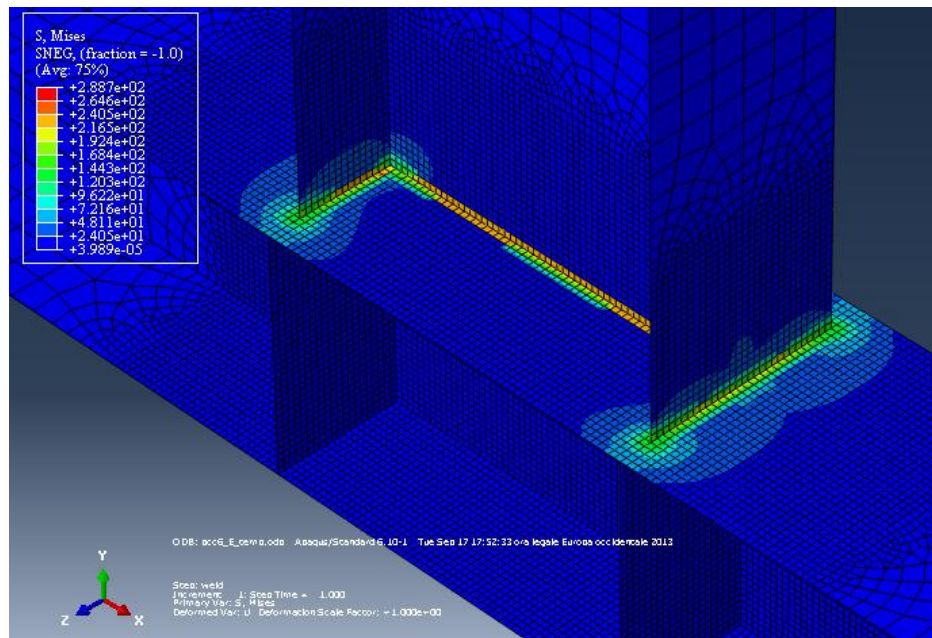


Figura 7-2 Tensioni residue dovute al processo simulato di saldatura

Sono poi stati applicati i carichi meccanici. Si è scelto di eseguire la prova di carico E a carico crescente monotono e la prova di carico C a cicli variabili.

7.1.1 BCC6-C CON PRESOLLECITAZIONE DA SALDATURA

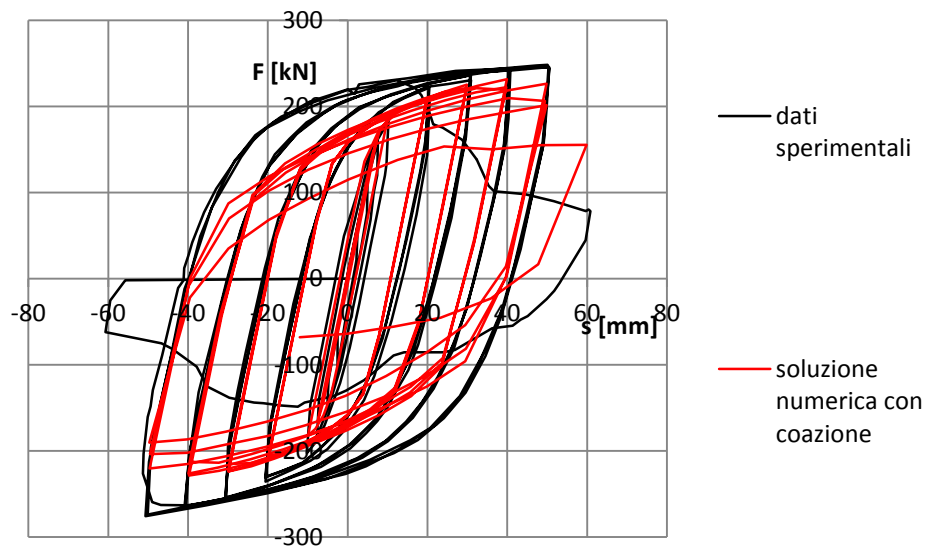


Grafico 7-1 Prova BCC6-C confronto tra risultato sperimentale e soluzione numerica con tensioni residue da saldatura

Il comportamento a spostamento ciclico crescente con tensioni residue da saldatura incluse nel modello numerico creato approssima bene la realtà arrivando a rottura dopo un uguale numero di cicli e avendo un andamento forza spostamento molto prossimo a quello reale registrato.

7.1.2 BCC6-E CON PRESOLLECITAZIONE DA SALDATURA

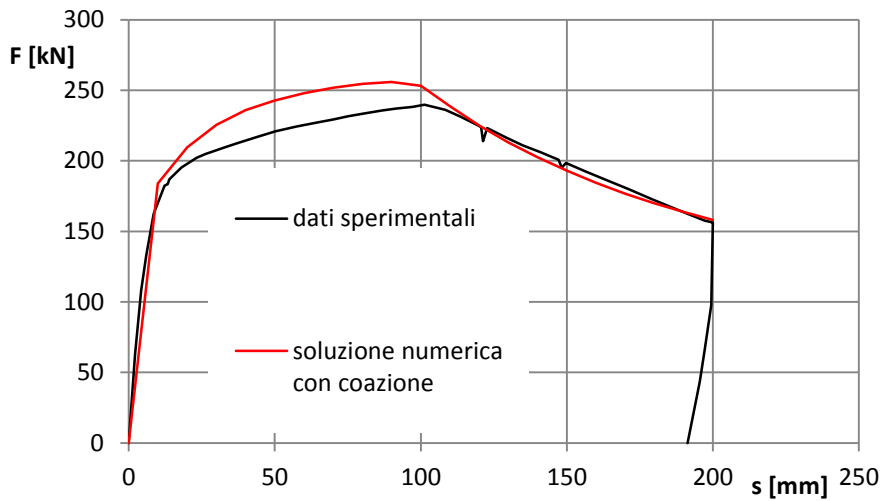


Grafico 7-2 Prova BCC6-E confronto tra risultato sperimentale e soluzione numerica con tensioni residue da saldatura

L'andamento della simulazione numerica con tensioni iniziali residue da saldatura riassunto con il precedente grafico forza F spostamento s è molto aderente a quello verificato sperimentalmente sul provino, aderendo con buona approssimazione nel ramo elastico, in quello incrudente e in quello rammollente a causa dell'instabilità.

7.2 INFLUENZA DELLE IMPRECISIONI GEOMETRICHE

In questo studio successivo si è voluto andare a determinare l'incidenza di difetti geometrici iniziali.

Si è scelto arbitrariamente di imporre un difetto geometrico proporzionale alla prima forma di buckling lineare. Essendo il risultato dell'analisi di buckling privo di un'unità degli spostamenti ma indicando questo solo le proporzioni della deformata si è inoltre imposto che il punto a spostamento massimo si muovesse di 1.5 mm e di scalare tutti gli altri spostamenti di conseguenza. Si è imposto un valore di 1.5 mm in quanto questo rappresenta 1/200 dell'altezza della trave, presa

come dimensione significativa in analogia a quanto prescritto in Eurocodice per le membrature in acciaio [14].

Ottenuta la deformata di buckling scalata si è importata questa come mesh iniziale per l'analisi non lineare ciclica o a spostamento crescente monotono da eseguire.

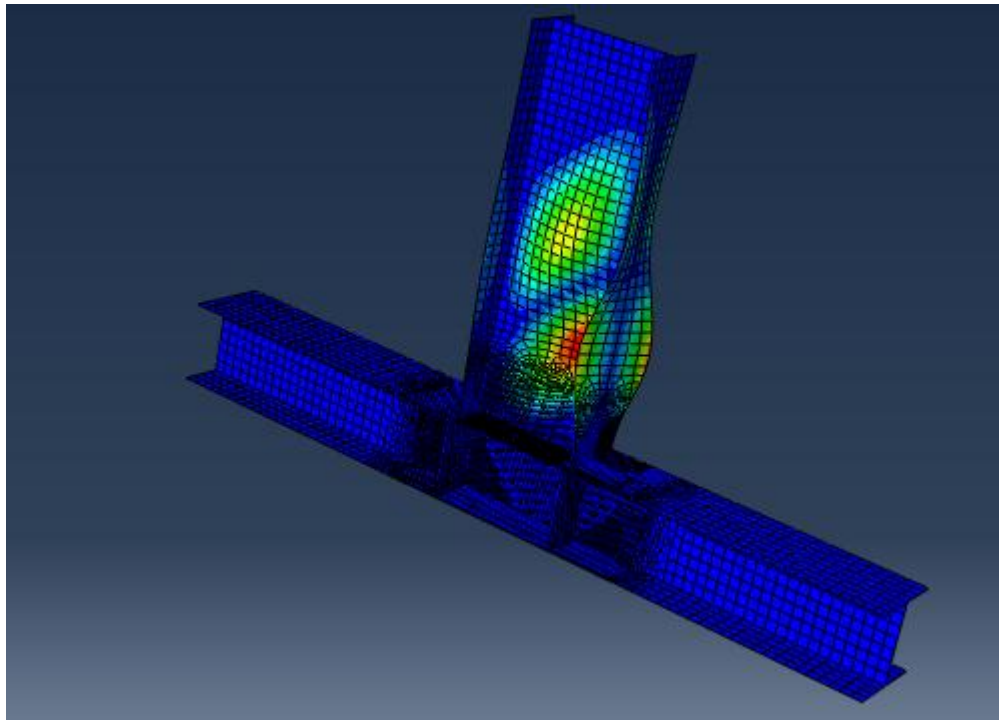


Figura 7-3 Deformata del primo modo di buckling della struttura

Come per lo studio dell'incidenza delle tensioni dovute al processo di saldatura si è scelto di eseguire le prove di carico E crescente monotono e la prova di carico C a cicli variabili.

7.2.1 BCC6-C CON IMPERFEZIONE GEOMETRICA INIZIALE

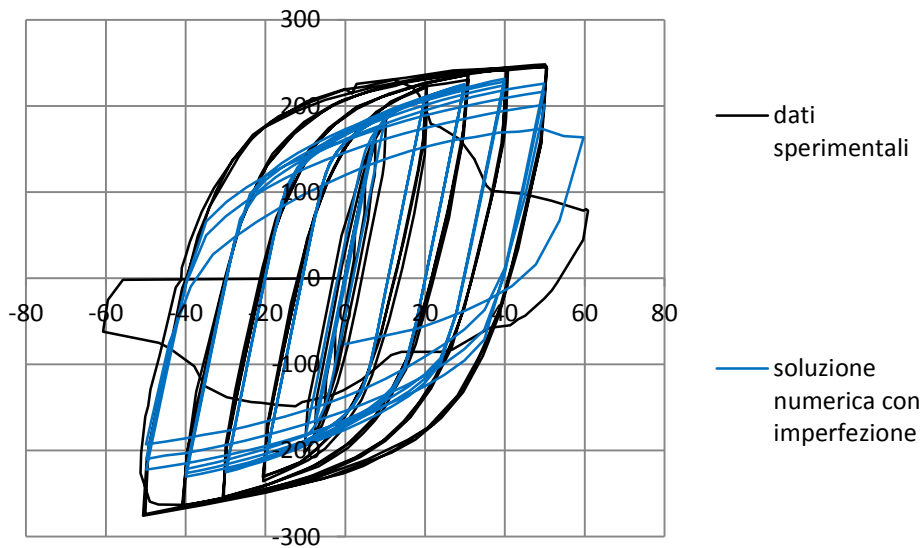


Grafico 7-3 BCC6-C confronto tra risultato sperimentale e soluzione numerica con difetto geometrico iniziale

L'inclusione nel modello di un piccolo difetto iniziale non porta a sensibili discrepanze nel comportamento globale della connessione trave pilastro. I valori di forza registrati in sommità in corrispondenza degli spostamenti impressi sono giudicabili come attendibili e il numero di cicli per arrivare ad una improvvisa perdita di rigidezza è pari a quello individuabile nella realtà.

7.2.2 BCC6-E CON IMPERFEZIONE GEOMETRICA INIZIALE

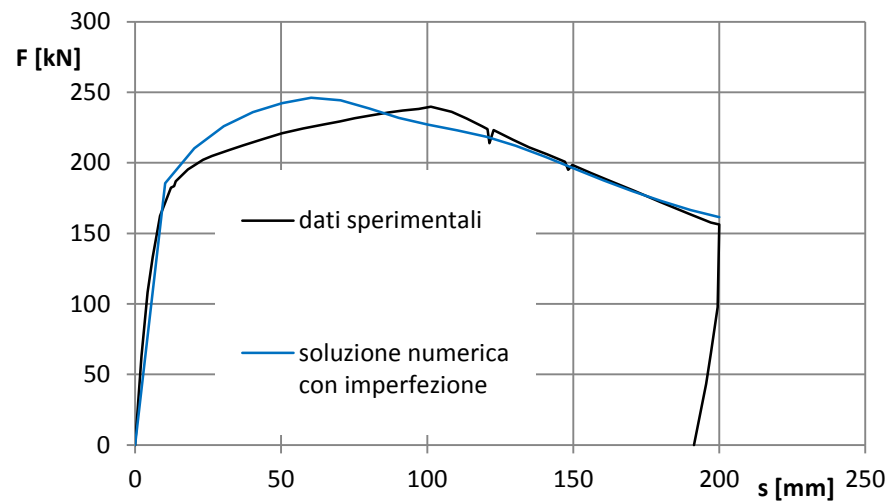


Grafico 7-4 Prova BCC6-E confronto tra risultato sperimentale e soluzione numerica con difetto geometrico iniziale

L'andamento della simulazione numerica riassunto con il precedente grafico forza spostamento anche in questo caso è aderente a quello verificato sperimentalmente sul provino, aderendo con buona approssimazione nel ramo elastico in quello incrudente e in quello rammollente a causa dell'instabilità. La differenza sta nell'instaurarsi a spostamenti inferiori, impressi in sommità, dell'instabilità locale della trave. Questo è attribuibile al difetto iniziale che segue l'andamento della deformata al primo modo di buckling.

7.3 CONFRONTO CON LE ANALISI PRECEDENTI

In seguito vengono confrontati i risultati delle simulazioni senza difetti, con saldatura, con difetto geometrico per i due processi di carico.

7.3.1 BCC6-C CONFRONTO TRA ANALISI

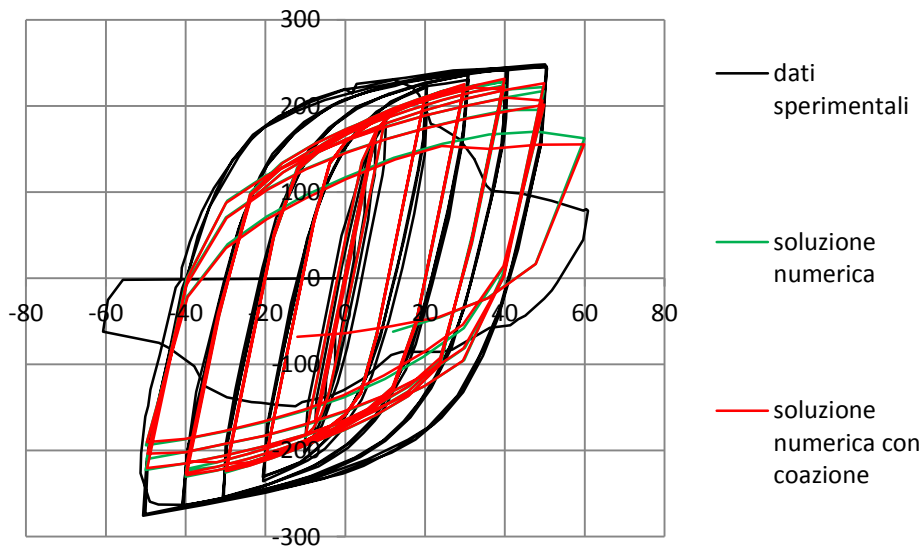


Grafico 7-5 Confronto prova BCC6-C con e senza tensioni residue da saldatura

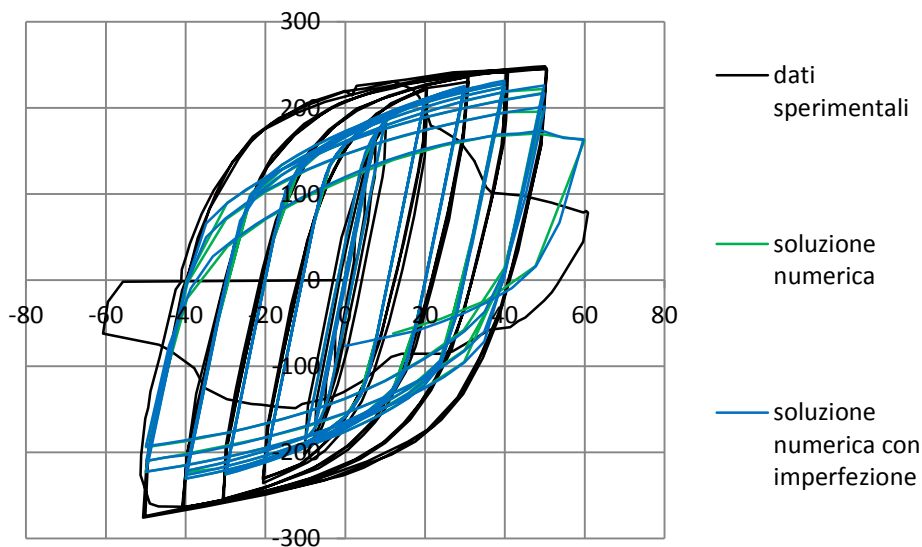


Grafico 7-6 Confronto prova BCC6-C con e senza difetti geometrici

Come si può notare dai grafici benché i valori ottenuti con i tre diversi modelli numerici, uno privo di imperfezioni, uno con tensioni residue da saldatura all'attacco della testa della trave alla flangia del pilastro e uno con difetti di natura geometrica e cioè lievi disallineamenti di flange e anime rispetto al piano ideale su cui dovrebbero giacere, si può concludere che i difetti iniziali introdotti non

influenzino significativamente l'esito dell'analisi. Per quanto riguarda i difetti dovuti al carico termico è riscontrabile in letteratura come per processi ciclici con forti escursioni in campo plastico l'influenza di tensioni iniziali risulti tanto più trascurabile quanto più rilevante sia il fenomeno di plasticizzazione [9]. La scarsa influenza del difetto geometrico è invece attribuibile al fatto che per quanto gli spostamenti applicati alla sommità della trave siano elevati, non si spingono comunque al punto tale da provocare fenomeni di instabilità sebbene questi possano essere favoriti dalla presenza di un difetto proporzionale alla deformata che si otterrebbe raggiunto il buckling della struttura.

7.3.2 BCC6-E CONFRONTO TRA ANALISI

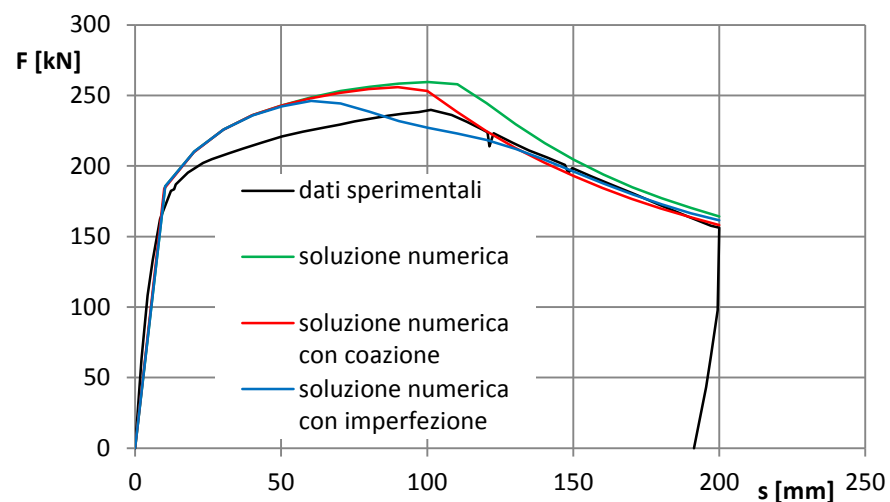


Grafico 7-7 Confronto prova BCC6-E con e senza difetti iniziali

L'influenza delle imperfezioni risulta sensibile nella prova a spostamento impresso crescente monotono per quanto riguarda l'andamento della curva forza spostamento. La discrepanza tra gli andamenti risulta più marcata nel tratto che va dallo snervamento fino a circa 150 mm di spostamento impresso in sommità. Per quanto riguarda invece i valori di maggior interesse della prova e cioè forza ultima e forza a 200 mm si può affermare che la presenza di difetti di natura termica o geometrica non causa una variazione sostanziale dei risultati. La forza

massima del sistema varia infatti di pochi punti percentuali e la forza in corrispondenza dello spostamento massimo risulta pressoché invariata. Questo permette di notare quindi come i difetti abbiano influenza principalmente nel tratto immediatamente successivo al primo snervamento. Allo svilupparsi di deformazioni plastiche maggiori e più estese e con la formazione di fenomeni di instabilità locale il comportamento dei vari modelli si uniforma.

Alla luce dei risultati delle due simulazioni svolte, a carico ciclico e a carico crescente monotono, si può quindi concludere come la presenza di un difetto geometrico iniziale o di tensioni residue dovute al processo di saldatura siano sensibili solo in caso di carico monotono e per deformazioni della struttura piuttosto elevate, mentre per valori di spostamento inferiori, o nel caso di fenomeni di deformazione ciclica, la presenza di questi difetti sia tranquillamente trascurabile.

8. CONNESSIONI SALDATE TRAVE-COLONNA

ALTERNATIVE

La rottura dei provini BCC6 è caratterizzata da comportamento generalmente duttile o misto, tranne nel caso di carico D in cui la rottura riscontrata è fragile. Ad ogni modo indipendentemente dalla duttilità riscontrata con le prove cicliche la localizzazione della rottura risulta sempre eccessivamente prossima alla zona di connessione tra trave e pilastro. Nel presente capitolo si andrà a trattare la tematica della localizzazione delle cerniere plastiche nei telai saldati in acciaio al fine di garantire la duttilità prevista in sede di progetto.

I telai saldati dovrebbero essere proporzionati e dettagliati al fine di garantire la desiderata capacità di assorbire azioni sismiche sotto forma sia di deformazione elastica che di formazione di cerniere plastiche. Queste ultime inoltre, dovute allo svilupparsi di deformazioni plastiche a flessione e taglio in porzioni limitati degli elementi componenti la struttura, si deve poter garantire possano formarsi unicamente in posizioni predeterminate all'interno del telaio.

La formazione di un numero sufficiente di cerniere plastiche sulle travi del telaio porta allo sviluppo di un meccanismo di dissipazione plastica del telaio in grado di dissipare grandi quantità di energia. La formazione di cerniere sui pilastri porta invece a meccanismi incapaci di grandi dissipazioni e pertanto non desiderati in fase di progetto.

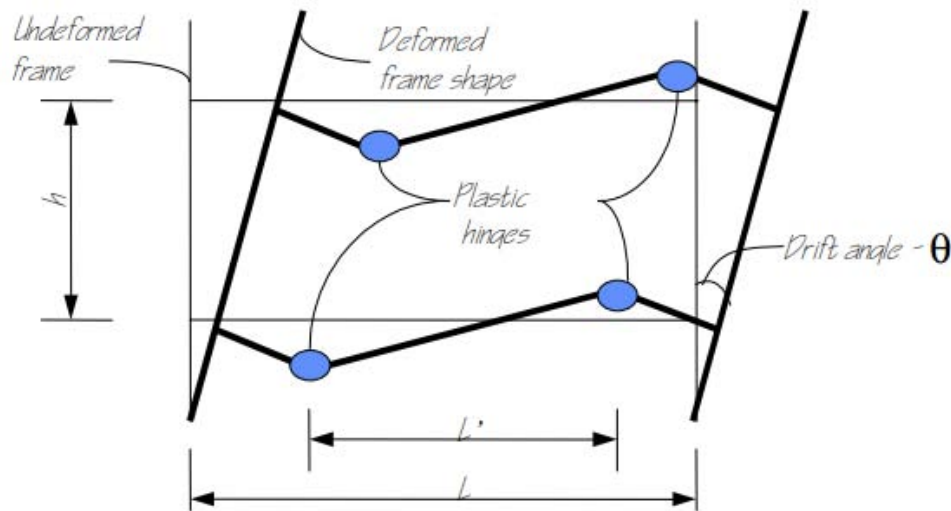


Figura 8-1 Localizzazione ideale delle cerniere plastiche da FEMA-350

La formazione della cerniera plastica leggermente distanziata dalla zona di giunzione tra trave e pilastro è preferibile. La formazione in corrispondenza del nodo può infatti portare a picchi tensionali notevoli nella zona di giunzione tra flange della trave e flangia del pilastro e ciò può portare ad una rottura fragile della connessione con le conseguenti perdite di rigidezza e capacità portante della struttura. Inoltre se le dimensioni della cerniera plastica superano la distanza del punto di formazione di questa dal pilastro si rischia il coinvolgimento del pannello nodale o peggio del pilastro con conseguente possibilità di formazione di meccanismi di piano soffice [2][13].

8.1 LOCALIZZAZIONE DELLE CERNIERE PLASTICHE

La posizione indicata in seguito come ideale per la formazione di cerniere plastiche è da ritenersi tale per telai progettati per resistere a momenti la cui origine è solo in piccola parte dovuta ai carichi gravitazionali, quali appunto i telai saldati utilizzati in zona sismica.

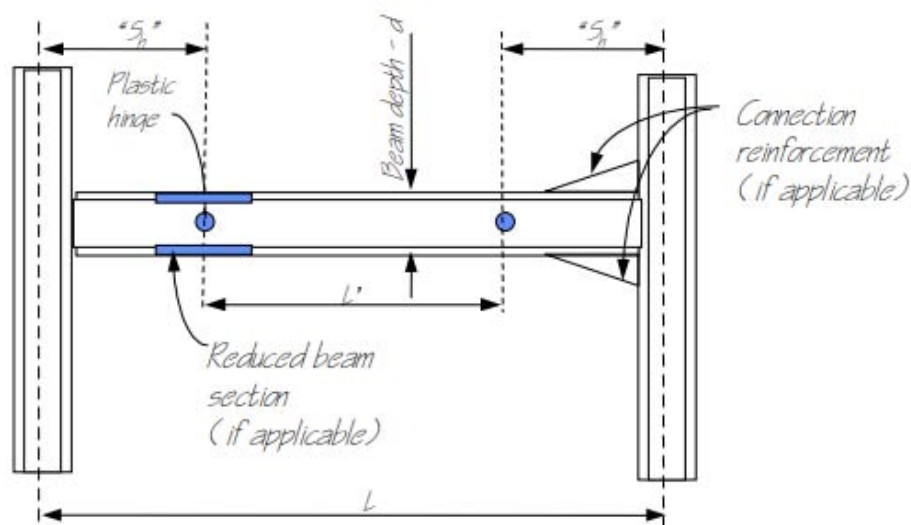


Figura 8-2 Localizzazione ideale delle cerniere plastiche

Nell'ipotesi che la dimensione della cerniera plastica sia circa $\frac{1}{2}$ l'altezza della trave e che la cerniera, al fine di un miglior comportamento a sollecitazioni orizzontali, non vada a interessare la zona di giunzione e il pilastro, si avrà necessariamente che la distanza s_h ideale di localizzazione della cerniera è pari ad almeno metà altezza della trave.

Durante la fase sperimentale preparatoria alla stesura del documento FEMA-350 è stato riscontrato come per nodi trave pilastro saldati, in assenza di irrigidimenti o altri dettagli strutturali introdotti nel collegamento al fine di localizzare la formazione della plasticizzazione, le cerniere plastiche tendono a formarsi ad una distanza dalla giunzione di circa $\frac{1}{4}$ l'altezza della trave. Ne consegue che un nodo trave pilastro saldato, in assenza di accorgimenti strutturali appositi, porta alla formazione del meccanismo di collasso indesiderato in fase di progetto.

8.2 DETTAGLI STRUTTURALI PER LA LOCALIZZAZIONE DELLE CERNIERE PLASTICHE

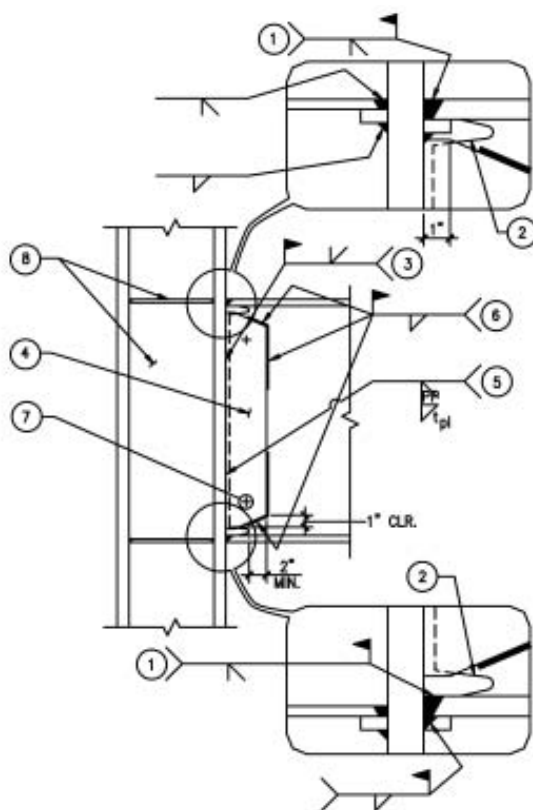
Al fine di localizzare la formazione delle cerniere plastiche due sono le categorie di metodi utilizzate:

- Rinforzo del nodo
- Indebolimento di un tratto di trave ad adeguata distanza.

La prima modalità, più utilizzata e studiata nel caso di telai bullonati è meno approfondita nel caso di telai saldati e può risultare rischiosa se usata senza le sufficienti attenzione e conoscenza del dettaglio costruttivo. Si può infatti andando ad irrobustire il nodo spostare la formazione della cerniera plastica sul pilastro anziché lungo la trave allontanandola dal nodo, cosa questa da evitare per quanto detto in precedenza.

8.2.1 WELDED UNREINFORCED FLANGE – WELDED WEB

Connessione ad anima saldata e flangia saldata non rinforzata, con saldature a completa penetrazione per la giunzione di flange di travi e pilastri. L'anima è saldata a completa penetrazione alla flangia del pilastro. Si utilizza un angolare di collegamento tra l'anima della trave e la flangia del pilastro durante la fase di montaggio di spessore pari a quello dell'anima della trave..



Notes

1. CJP groove weld at top and bottom flanges. At top flange, either (1) remove weld backing, backgouge, and add 5/16" minimum fillet weld, or (2) leave backing in place and add 5/16" fillet under backing. At bottom flange, remove weld backing, backgouge, and add 5/16" minimum fillet weld. Weld: QC/QA Category AH/T.
2. Weld access hole, see Figure 3-5.
3. CJP groove weld full length of web between weld access holes. Provide non-fusible weld tabs. Remove weld tabs after welding and grind end of weld smooth at weld access hole. Weld: QC/QA Category BH/T.
4. Shear tab of thickness equal to that of beam web. Shear tab length shall be so as to allow 1/8" overlap with the weld access hole at top and bottom, and the width shall extend 2" minimum back along the beam, beyond the end of the weld access hole.
5. Full-depth partial penetration from far side. Weld: QC/QA Category BM/T.
6. Fillet weld shear tab to beam web. Weld size shall be equal to the thickness of the shear tab minus 1/16". Weld shall extend over the top and bottom one-third of the shear tab height and across the top and bottom. Weld: QC/QA Category BL/L.
7. Erection bolts: number, type, and size selected for erection loads.
8. For continuity plates and web doubler plates see Figure 3-6.

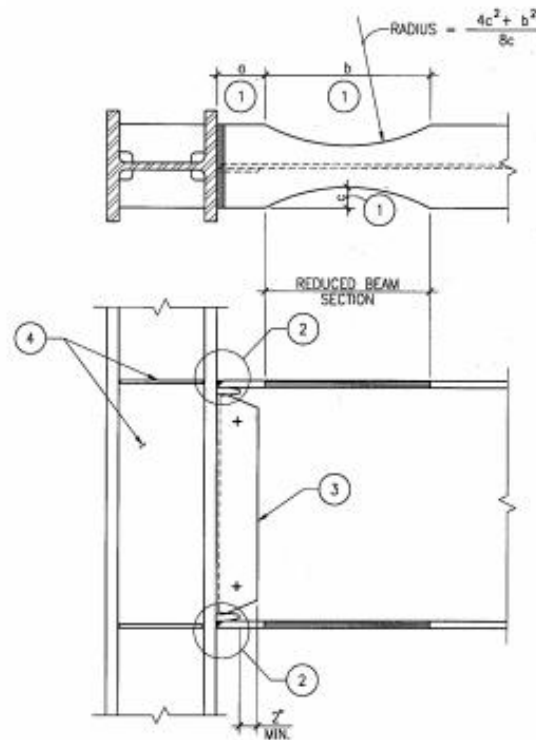
Figura 8-3 Prescrizioni da FEMA-350

Più utilizzata nel caso di telai saldati è il metodo di indebolimento della trave.

8.2.2 REDUCED BEAM SECTION METHOD

Connessione con riduzione della sezione della trave, ed in particolare riduzione delle flange della trave. Si praticano degli intagli a raggio costante circolari sulle flange inferiore e superiore vicino alle estremità della trave. Le saldature eseguite

in testata sono a completa penetrazione. Non sono utilizzati rinforzi per la realizzazione dell'unione della trave alla flangia del pilastro.



Notes

1. See Section 3.5.5.1 for calculation of RBS dimensions. See *FEMA-353, Recommended Specifications and Quality Assurance Guidelines for Steel Moment Frame Construction for Seismic Applications*, for fabrication details including cutting methods and smoothness requirements.
2. See Figure 3-8, and Note 1 to Figure 3-8, except that weld access hole may be as shown there, or as in AISC LRFD Vol. 1, Fig. C-J1.2, for rolled shapes or groove welded shapes.
3. Web Connection: Erection bolts: number, type, and size selected for erection loads.
 - a. Alternative 1: CJP welded web. Weld QC/QA Category BM/L. Shear tab length is equal to the distance between the weld access holes plus 1/4". Shear tab thickness is as required for erection and the tab serves as backing for CJP weld (3/8" min. thickness). Shear tab may be cut square, or tapered as shown. Weld of shear tab to column flange is minimum 3/16" fillet on the side of the beam web, and a fillet sized for erection loads (5/16" minimum) on the side away from the beam web. No weld tabs are required at the ends of the CJP weld and no welding of the shear tab to the beam web is required. Weld: QC/QA Category BM/L. Erection bolts are sized for erection loads.
 - b. Alternative 2: Bolted shear tab. Shear tab and bolts are sized for shear, calculated as in Section 3.2 and using the methods of AISC. The shear tab should be welded to the column flange with a CJP groove weld or fillet of 1/4 t_{pl} on both sides. Weld: QC/QA Category BL/T. Bolts shall be ASTM A325 or A490, and shall be fully-tightened.
4. For continuity plates and web doubler plates see Figure 3-6.

Figura 8-4Prescrizioni da FEMA-350 per nodo con connessione RBS

Per quanto riguarda il dimensionamento degli intagli e il loro posizionamento, seguendo la notazione usata in Figura 8-4Prescrizioni da FEMA-350 per nodo con connessione RBS per a, b, c si avrà:

$$0.50b_f \leq a \leq 0.75b_f$$

$$0.50d_b \leq b \leq 0.75d_b$$

$$0.20b_f \leq c$$

Avendo posto b_f larghezza della flangia integra della trave e d_b altezza della trave. Il valore di c viene individuato a tentativi a partire da un valore di $c=0.20b_f$ al fine di garantire una sufficiente resistenza a momento a rottura.

8.2.3 *SLOTTED WEB E REDUCED WEB*

Le due tipologie di dettaglio che verranno qui in seguito solo accennate sono coperte da copyright dalle rispettive aziende produttrici.

La connessione *slotted-web* è molto simili alle connessioni utilizzate precedentemente al sisma di Northridge del 1994 di tipo trave saldate e imbullonata alla colonna ormai in disuso vista l'inefficacia verificatasi con il terremoto. In seguito a studi eseguiti sulla vecchia tipologia strutturale si è giunti a separare le flange dall'anima in prossimità della connessione e in questo modo il nodo si comporterà in modo differente. Il taglio verticale portato dalle flange viene ridotto del 50% circa ad un valore di 3% del totale e quindi la sollecitazione è portata quasi completamente dall'anima. L'anima è anche forzata a portare la sua intera aliquota di momento e sono ridotti i forti gradienti tensionali alle flange che portano all'instabilità delle stesse. L'instabilità se si verifica interessa anima o flange indipendentemente senza generare torsioni della trave, caratteristica importante soprattutto per le travi situate lungo il perimetro dell'edificio.

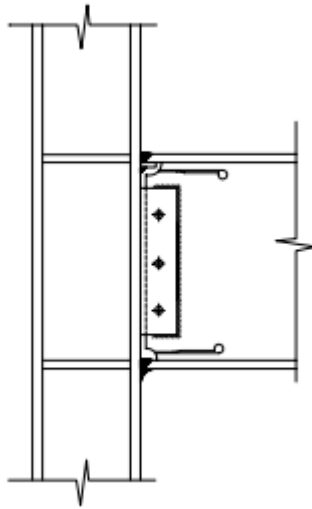


Figura 8-5 Connessione "slotted web"

La connessione *reduced web* risulta invece molto simile alla tipologia *reduced beam section* trattata in precedenza. In questa tipologia di nodo però la riduzione è operata tramite fori circolari nell'anima della trave.

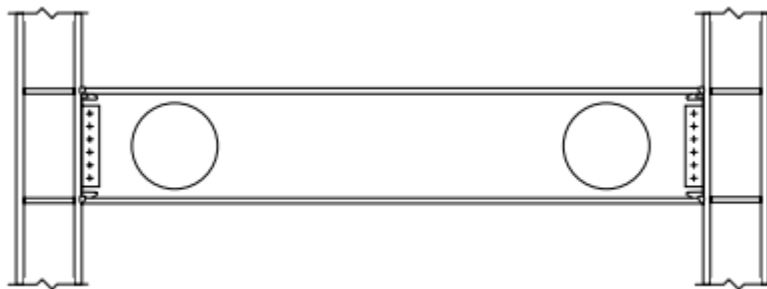


Figura 8-6 Connessione "reduced web"

8.3 PROPOSTA DI UN NODO ALTERNATIVO

Andando a seguire le prescrizioni contenute in FEMA-350 riportate in precedenza in questo capitolo, si è scelto di andare a modellare un nodo di tipo *Reduced Beam Section* con il software Abaqus utilizzando le stesse caratteristiche del modello sviluppato per ricalcare le prove BCC6 con l'unica differenza nella presenza degli intagli delle flange della trave. Si è scelto il dettaglio strutturale tipo *Reduced beam section* in quanto gli altri dettagli sono di proprietà di aziende e

conseguentemente non ne è specificato il metodo di calcolo all'interno di FEMA-350.

8.3.1 PROGETTAZIONE DELLA RIDUZIONE DI SEZIONE DELLA TRAVE

Facendo riferimento alla Figura 8-4 Prescrizioni da FEMA-350 per nodo con connessione RBS e poste d_b altezza della trave e b_f larghezza delle flange della trave si dovranno rispettare i seguenti criteri geometrici:

$$0.50b_f \leq a \leq 0.75b_f$$

$$0.50d_b \leq b \leq 0.75d_b$$

$$0.20b_f \leq c$$

e pertanto si sono scelti i seguenti valori: $a=100$ mm, $b=220$ mm, $c=30$ mm; il raggio di curvatura dell'intaglio risulterà $R=216.7$ mm.

Calcolato il momento plastico della sezione ridotta come:

$$Z_{RBS} = \frac{t_w d_b^2}{4} + (b_f - t_w)(d_b - t_f)t_f = 416368 \text{ mm}^3$$

con t_w e t_f rispettivamente spessore di anima e flangia e b_f ridotto rispetto a quello della trave integra di $2c$.

Si avrà quindi un momento in corrispondenza della cerniera plastica pari a:

$$M_{pr} = C_{pr} \cdot R_y \cdot Z_{RBS} \cdot F_y = 1.15 \cdot 1.10 \cdot 416368 \cdot 355 = 186.1 \text{ kNm}$$

con C_{pr} e R_y coefficienti da FEMA-350, F_y tensione ultima dell'acciaio da norma statunitense.

Calcolato quindi il taglio in corrispondenza della cerniera plastica:

$$V_p = \frac{M_{pr}}{L} = \frac{186.1}{0.8625} = 215.8 \text{ kN}$$

con L lunghezza della trave, si va quindi a verificare che la riduzione di sezione scelta sia sufficiente ($M_f < R_y Z F_y$):

$$M_f = M_{pr} + V_p x = 186.1 + 45.3 = 231.4 < R_y Z F_y = 235.1$$

con $x=a+b/2=210\text{mm}$ posizione della cerniera plastica.

La riduzione progettata risulta quindi corretta.

8.3.2 DESCRIZIONE DEL MODELLO E DELLE ANALISI

Vale per questo modello tutto quanto esposto al capitolo 5. L'unica differenza sta nella geometria del modello che introduce gli intagli delle flange progettati precedentemente e la zona di mesh maggiormente discretizzata che nella trave si estende per un tratto che va dalla zona di collegamento al pilastro fino alla fine del tratto di riduzione. L'energia specifica che governa il fenomeno di danno è stata posta pari a $G_f=4000 \text{ J/m}^2$. Sono stati trascurati difetti geometrici iniziali e tensioni residue da saldatura perché poco influenti sul comportamento del nodo.

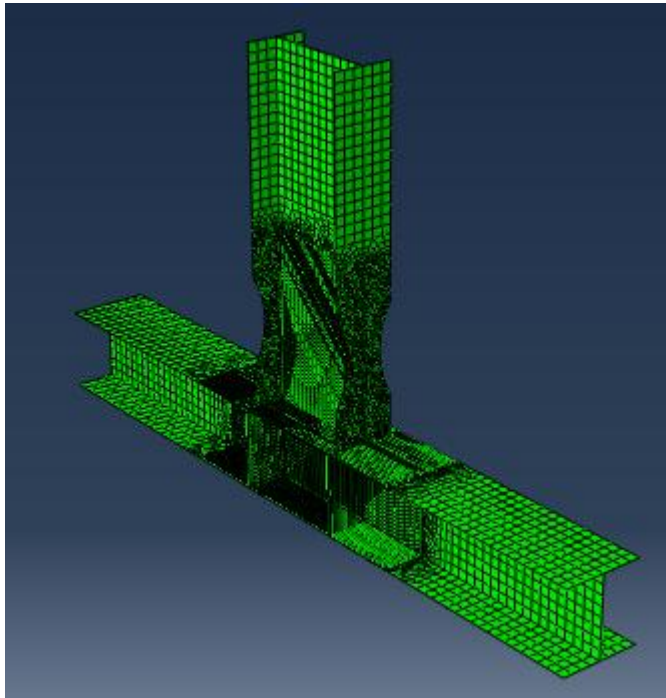


Figura 8-7 Mesh modello con nodo RBS

Sono state eseguite una prova pushover analoga alla prova con spostamento di tipo E e una prova ciclica analoga alla prova con storia di spostamento C utilizzati per i provini BCC6.

8.3.3 RISULTATI OTTENUTI

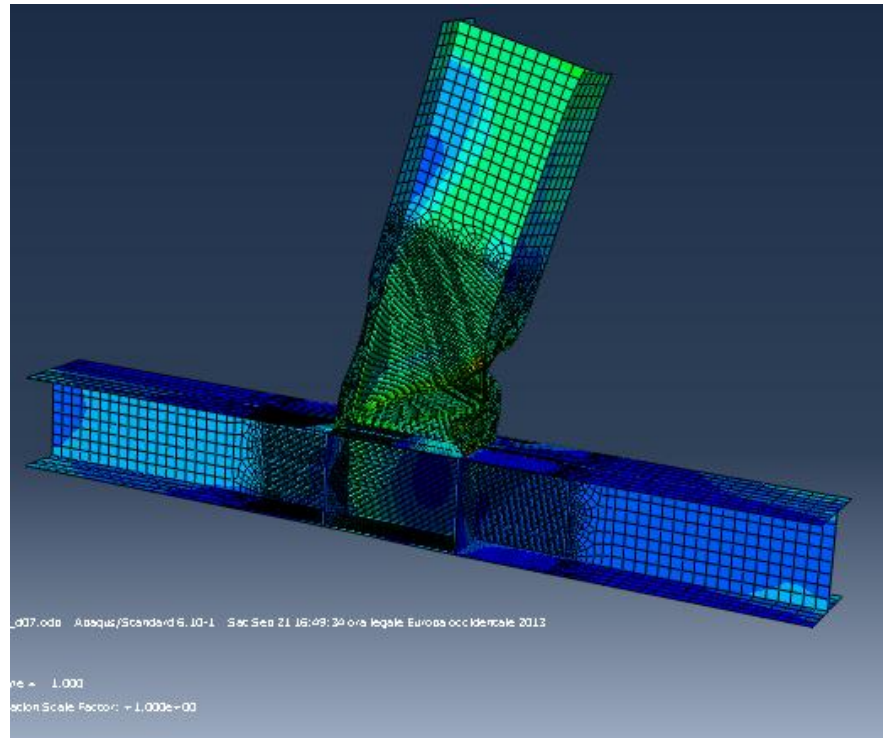


Figura 8-8 Deformata finale analisi a spostamento monotono

Per quanto riguarda la prova a spostamento crescente monotono si riscontra un'aspettata diminuzione del valore massimo di forza. A parità di spostamento con il modello tipo BCC6 si riscontra un'instabilità più pronunciata. La plasticizzazione è localizzata nel tratto ridotto come da progetto.

Conessioni saldate trave-colonna alternative

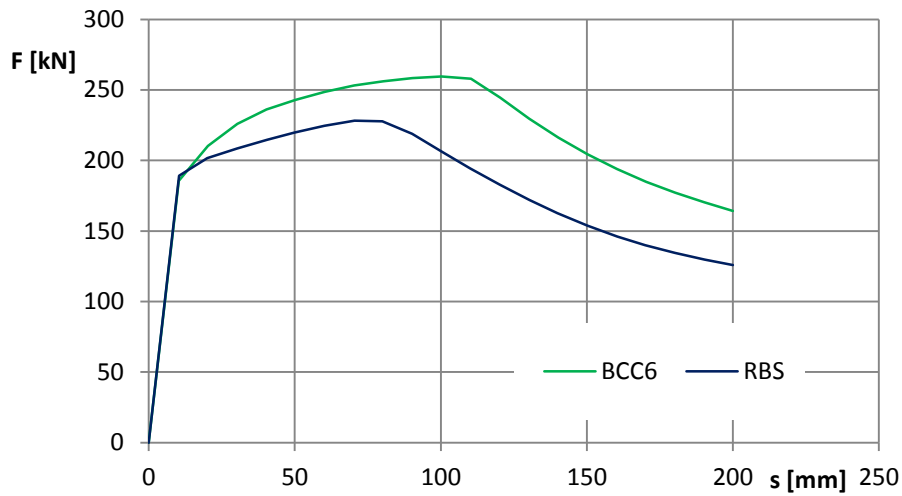


Grafico 8-1 Confronto pushover BCC6 e RBS

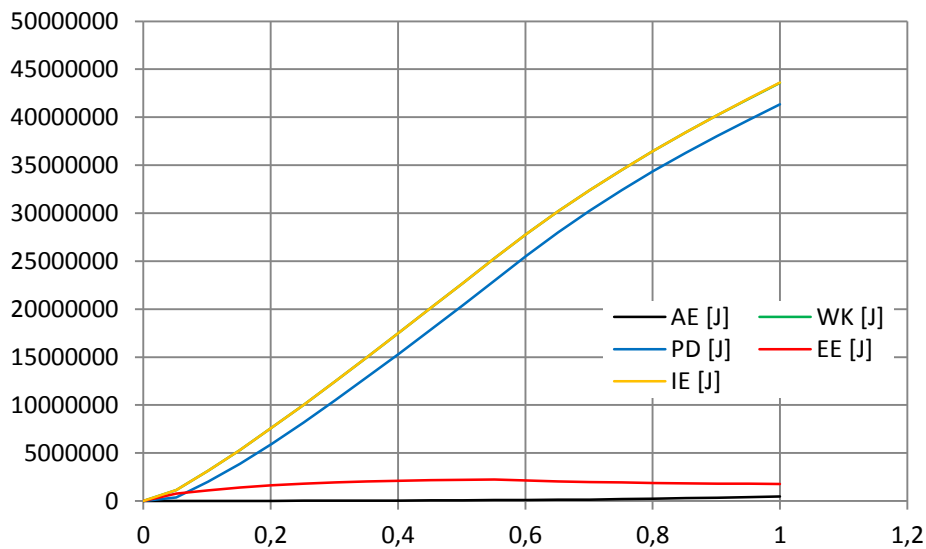


Grafico 8-2 Andamento energie in gioco per analisi RBS

Anche nella prova a carico ciclico i valori di forza registrati sono più bassi che per i provini BCC6 in accordo alla riduzione di sezione della trave applicata. Si riscontra inoltre un comportamento softening al passare dei cicli anziché una perdita improvvisa di rigidità come nel caso dei provini BCC6. La localizzazione del danno è concentrata tutta nella zona a sezione ridotta come in figura.

Connessioni saldate trave-colonna alternative

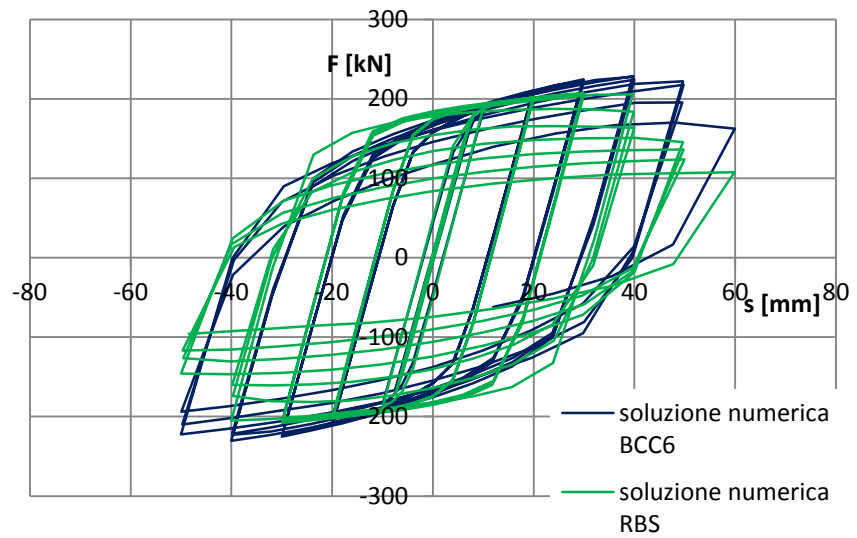


Grafico 8-3 Comparazione tra le soluzioni numeriche BCC6-C e RBS

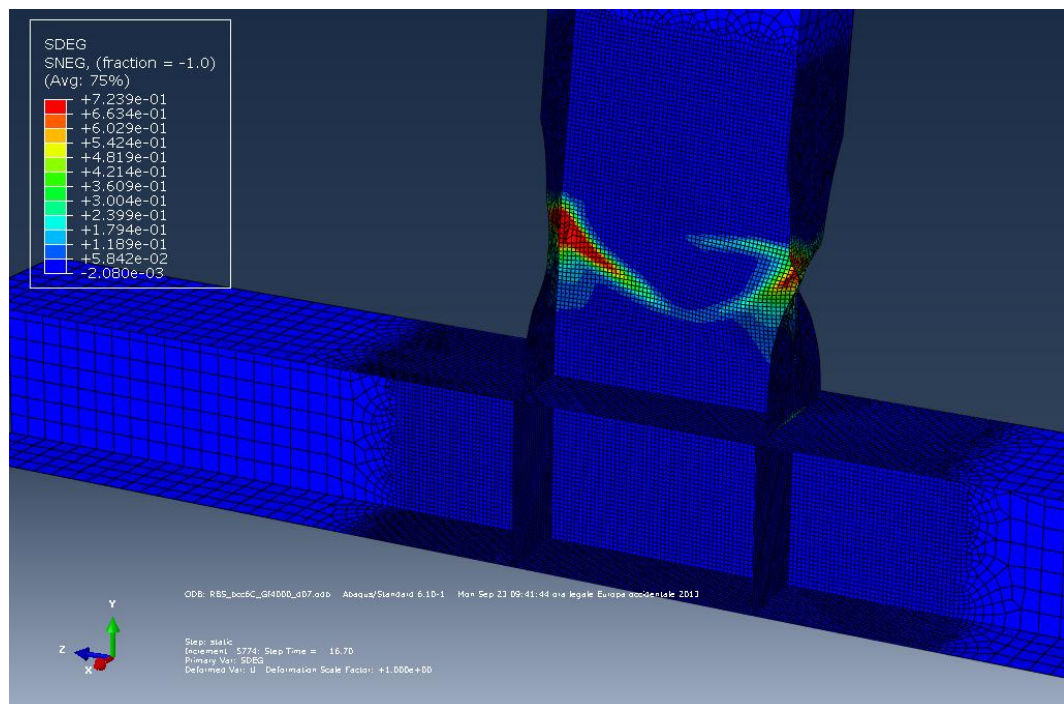


Figura 8-9 Localizzazione del danneggiamento a carico ciclico

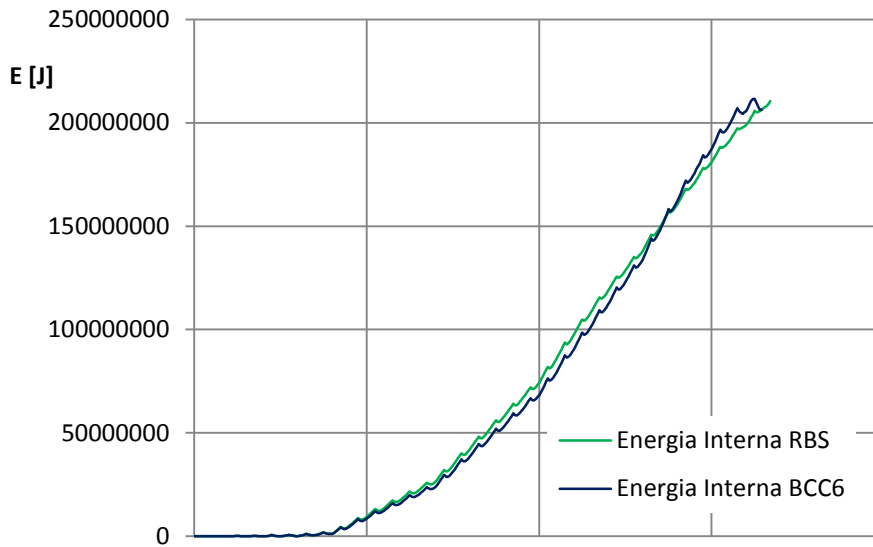


Grafico 8-4 Confronto dell'andamento dell'energia interna nel tempo

L'andamento dell'energia interna, composta nella quasi totalità da energia di plasticizzazione è molto simile tra i due modelli. Si ha un valore leggermente maggiore alla fine per il nodo BCC6 in quanto non presenta rammollimento fino all'ultimo ciclo, a differenza del nodo con trave a sezione ridotta RBS in cui si ha un degrado della rigidezza più progressivo. Questo risulta molto importante ai fini dissipativi del sistema costruttivo anche se è da sottolineare come nell'analisi svolta, di tipo quasi statico, non si hanno informazioni sugli effetti delle forze di natura inerziale.

8.3.4 CONSIDERAZIONI

Si nota dai risultati ottenuti come il nodo alternativo di tipo *Reduced Beam Section* porti ad una localizzazione della cerniera plastica in una zona considerabile come più sicura ai fini dello sviluppo dei meccanismi di collasso.

A livello energetico si nota inoltre come nonostante il deterioramento progressivo delle caratteristiche meccaniche l'energia dissipata al termine del processo sia pressoché identica.

9. CONCLUSIONI

A fronte delle semplificazioni introdotte nel modello, tra cui le più importanti sono l'utilizzo di una legge di incrudimento lineare e l'aver trascurato la maggior fragilità del materiale nella zona di saldatura, si ottengono risultati comunque in grado di approssimare in modo soddisfacente il comportamento sperimentale. Sono infatti comparabili alla realtà il numero di cicli precedenti ad un cambio netto di rigidità del sistema, l'andamento del deterioramento, l'influenza trascurabile di tensioni residue da saldatura nelle prove cicliche. Come riscontrabile in letteratura l'influenza di difetti iniziali si ha solo nelle prime fasi di plasticizzazione. Quando le deformazioni plastiche invece diventano preponderanti, come nelle prove oligocicliche, l'influenza di difetti iniziali tende a diventare trascurabile.

Per quanto riguarda il solutore utilizzato di tipo *Full-Newton* si può constatare come sia nettamente più veloce se confrontato con un solutore di tipo esplicito alle differenze centrali utilizzabile per analisi dinamiche in regime quasi-statico. Il maggior costo computazionale dei singoli *step* di carico viene infatti abbondantemente compensato dalla necessità di realizzare incrementi di carico maggiori. Il solutore risulta però inadatto nelle fasi più avanzate di soluzione quando la non-linearità di materiale e di geometria aumenta. Si può quindi reputare adatto solo a valutare l'evolversi del fenomeno di danno ma non il suo termine e cioè la rottura. Nei confronti delle fasi finali delle simulazioni l'andamento dell'energia totale è risultato solo in pochi casi in grado di confermare che la non convergenza del solutore fosse imputabile ad una perdita di

Conclusioni

rigidezza del sistema a causa della rottura. Questo perché nella maggior parte dei casi, non si sono registrati cambiamenti nel suddetto andamento energetico e quindi non si sono potute trarre conclusioni riguardanti la rottura.

Le connessioni di tipo BCC6 saldate presentano rottura in zone non desiderabili e cioè in prossimità delle saldature e del pannello nodale. Per ovviare a questo problema è consigliabile utilizzare metodi di connessione quali quelli presenti in FEMA-350, come ad esempio il tipo *Reduced Beam Section*. Questi nodi sono infatti in grado di localizzare la formazione di cerniere plastiche sulla trave a sufficiente distanza dal nodo e quindi garantire migliori prestazioni strutturali.

BIBLIOGRAFIA

- [1] J.C. Simo, T.J.R Hughes (1998) Computational Inelasticity – Springer
- [2] R. O. Hamburger, H. Krawinkler, J. O. Malley, S. M. Adan (2009) Seismic Design of Steel Special Moment Frames: A Guide for Practicing Engineers - NEHRP Seismic Design Technical Brief No. 2
- [3] N. F. G. Youssef, D. Bonowitz, J. L. Gross (1995) NISTIR-5625 A Survey of Steel Moment-Resisting Frame Buildings Affected by the 1994 Northridge Earthquake – National Institute of Standard and Technology
- [4] A.S. Elnashai (2001) A very brief history of earthquake engineering with emphasis on developments in and from the British Isles - Pergamon
- [5] R. Tremblay, P. Timler M. Bruneau, A. Filiatrault (1995) Performance of steel structures during the 1994 Northridge earthquake - Canadian Journal of Civil Engineering
- [6] S. A. Mahin (1997) Lessons from Steel Buildings Damaged by the Northridge Earthquake
- [7] Abaqus 6.10 Theory manual, Analysis User's Manual Volume I-V
- [8] K.-J. Bathe (1996) Finite Element Procedures – Prentice-Hall
- [9] S. Suresh (1998) Fatigue of Materials – Cambridge University Press
- [10] C.A. Castiglioni, R. Pucinotti (2007) Failure criteria and cumulative damage models for steel components under cyclic loading – Journal of Constructional Steel Research
- [11] J. Lemaitre, J.-L. Chaboche (1990) Mechanics of solid materials – Cambridge University Press

Bibliografia

- [12] Y.C. Fung, Pin Tong (2001) Classical and computational solid mechanics
– World Scientific Pub Co Inc
- [13] Federal Emergency Management Agency (2000) FEMA-350:
Recommended Seismic Design Criteria for New Steel Moment-Frame Buildings
- [14] EN 1993-1-1:2005 Parte 1-1: Regole generali e regole per gli edifici

INDICE DI FIGURE, GRAFICI, TABELLE

Figura 1-1 Effetti del terremoto del Kanto nel 1923	9
Figura 1-2 Effetti del terremoto di Long Beach (CA) nel 1933	10
Figura 1-3 Dettaglio di connessione "bolted-web welded-flange"	11
Figura 1-4 Meccanismo di formazione di piano soffice	12
Figura 2-1 Illustrazione del metodo di Newton-Raphson per un sistema ad un grado di libertà	18
Figura 2-2 Illustrazione dell'iterazione per individuare $f=0$	18
Figura 2-3 Illustrazione del metodo di Newton-Raphson modificato per un sistema ad un grado di libertà	19
Figura 2-4 Sistema attrittivo che rappresenta la plasticità monodimensionale rateo-indipendente [1]	22
Figura 2-5 Illustrazione schematica del comportamento dell'incrudimento cinematico	25
Figura 2-6 Schematizzazione di un materiale danneggiato	29
Figura 4-1 Caratteristiche geometriche dei provini BCC6	42
Figura 4-2 Apparato di prova sperimentale	43
Figura 4-3 Apparato di prova	44
Figura 4-4 Dettaglio della rottura del provino BCC6-A	50
Figura 4-5 Dettaglio della rottura del provino BCC6-B	51
Figura 4-6 Dettaglio della rottura del provino BCC6-BB	52
Figura 4-7 Dettaglio della rottura del provino BCC6-C	53
Figura 4-8 Dettaglio della rottura del provino BCC6-D	54

Figura 4-9	Dettaglio della deformazione del provino BCC6-E a spostamento ultimato.....	55
Figura 5-1	Geometria del modello	58
Figura 5-2	Mesh utilizzata.....	59
Figura 5-3	Dettaglio della zona raffinata della mesh	60
Figura 5-4	Notazione assunta per l'elemento isoparametrico standard	72
Figura 5-5	Condizioni al contorno vincolari, le frecce arancioni rappresentano il vincolo rotazionale, quelle blu il vincolo a traslazione	84
Figura 6-1	Localizzazione del danno per spostamento "A"	88
Figura 6-2	Localizzazione del danno nel modello agli elementi finiti.....	91
Figura 6-3	Confronto comportamento reale e modello	92
Figura 6-4	Andamento delle energie in gioco nel tempo	92
Figura 6-5	Confronto comportamento reale e modello	94
Figura 6-6	Localizzazione del danno per spostamento "C"	97
Figura 6-7	Localizzazione del danno per spostamento "D"	101
Figura 6-8	Localizzazione del danno per spostamento "E"	105
Figura 7-1	Andamento della temperatura applicata	110
Figura 7-2	Tensioni residue dovute al processo simulato di saldatura	110
Figura 7-3	Deformata del primo modo di buckling della struttura	113
Figura 8-1	Localizzazione ideale delle cerniere plastiche da FEMA-350	120
Figura 8-2	Localizzazione ideale delle cerniere plastiche	121
Figura 8-3	Prescrizioni da FEMA-350	123
Figura 8-4	Prescrizioni da FEMA-350 per nodo con connessione RBS.....	124
Figura 8-5	Connessione "slotted web"	126
Figura 8-6	Connessione "reduced web"	126
Figura 8-7	Mesh modello con nodo RBS	128
Figura 8-8	Deformata finale analisi a spostamento monotono	129
Figura 8-12	Localizzazione del danneggiamento a carico ciclico	131
Grafico 4-1	Spostamento impresso al provino BCC6 - storia di carico A.....	46

Grafico 4-2Spostamento impresso al provino BCC6 - storia di carico B	46
Grafico 4-3Spostamento impresso al provino BCC6 - storia di carico BB.....	47
Grafico 4-4Spostamento impresso al provino BCC6 - storia di carico C	47
Grafico 4-5Spostamento impresso al provino BCC6 - storia di carico D	48
Grafico 4-6Spostamento impresso al provino BCC6 - storia di carico E	48
Grafico 4-7Forza-spostamento provino BCC6 spostamento impresso A	50
Grafico 4-8Forza-spostamento provino BCC6 spostamento impresso B	51
Grafico 4-9Forza-spostamento provino BCC6 spostamento impresso BB.....	52
Grafico 4-10Forza-spostamento provino BCC6 spostamento impresso C	53
Grafico 4-11Forza spostamento provino BCC6 spostamento impresso D.....	54
Grafico 4-12Forza spostamento provino BCC6 spostamento impresso E	55
Grafico 5-1Rappresentazione dell'andamento monoassiale del legame σ - ε con incrudimento e danno	83
Grafico 6-1Confronto comportamento reale e modello	86
Grafico 6-2Andamento delle energie in gioco nel tempo	87
Grafico 6-3Confronto comportamento reale e modello	87
Grafico 6-4Andamento delle energie in gioco nel tempo	89
Grafico 6-5Confronto comportamento reale e modello	90
Grafico 6-6Andamento delle energie in gioco nel tempo	91
Grafico 6-7Confronto comportamento reale e modello	93
Grafico 6-8Confronto comportamento reale e modello	94
Grafico 6-9Andamento delle energie in gioco nel tempo	95
Grafico 6-10Confronto comportamento reale e modello	96
Grafico 6-11Andamento delle energie in gioco nel tempo	97
Grafico 6-12Confronto comportamento reale e modello	98
Grafico 6-13Andamento delle energie in gioco nel tempo	99
Grafico 6-14Confronto comportamento reale e modello	100
Grafico 6-15Andamento delle energie in gioco nel tempo	101
Grafico 6-16Confronto comportamento reale e modello	102
Grafico 6-17Andamento delle energie in gioco nel tempo	103
Grafico 6-18Confronto comportamento reale e modello	104

Indice di figure, grafici, tabelle

Grafico 6-19 Andamento delle energie in gioco nel tempo	105
Grafico 6-20 Raffronto tra gli esiti sperimentali delle prove a spostamento "B" "BB"	106
Grafico 7-1 Prova BCC6-C confronto tra risultato sperimentale e soluzione numerica con tensioni residue da saldatura.....	111
Grafico 7-2 Prova BCC6-E confronto tra risultato sperimentale e soluzione numerica con tensioni residue da saldatura.....	112
Grafico 7-3 BCC6-C confronto tra risultato sperimentale e soluzione numerica con difetto geometrico iniziale.....	114
Grafico 7-4 Prova BCC6-E confronto tra risultato sperimentale e soluzione numerica con difetto geometrico iniziale	115
Grafico 7-5 Confronto prova BCC6-C con e senza tensioni residue da saldatura	116
Grafico 7-6 Confronto prova BCC6-C con e senza difetti geometrici.....	116
Grafico 7-7 Confronto prova BCC6-E con e senza difetti iniziali.....	117
Grafico 8-1 Confronto pushover BCC6 e RBS	130
Grafico 8-2 Andamento energie in gioco per analisi RBS	130
Grafico 8-3 Comparazione tra le soluzioni numeriche BCC6-C e RBS	131
Grafico 8-4 Confronto dell'andamento dell'energia interna nel tempo	132
 Tabella 4-1 Principali caratteristiche geometriche delle sezioni.....	 42
Tabella 4-2 Riassunto delle storie di carico	45
Tabella 4-3 Resistenze meccaniche nominali e reali del campione	49
Tabella 5-1 Proprietà dei materiali nel modello numerico.....	80
Tabella 5-2 Riassunto parametri di danno utilizzati.....	82